第5章　二次型

第3节　唯一性

主要内容

- 问题的提出
- 复数域的情形
- 实数域的情形

一、问题的提出

问题1 二次型$f=X^TAX$ $\xrightarrow{X=BY}$ 二次型$f=Y^T(B^TAB)Y$

$$=d_1y_1^2+d_2y_2^2+\dots+d_ry_r^2,\quad d_i\neq 0,\ i=1,2,\dots,r.$$

秩(A)与秩(B^TAB)是否相等?

二次型经过非退化线性替换所得的标准形中，系数不为零的平方项的个数是唯一确定的，与所作的非退化线性替换无关.

称二次型矩阵的秩为二次型的秩.

问题2 求 $f=2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$ 经线性替换(1)和(2)所得的结果?

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

化成的标准形为

$$2u_1^2+6u_3^2-2u_3^2,$$

可以验证，该二次型经过线性替换

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

就得到另一个标准形 $2v_1^2+\frac{2}{3}v_2^2-\frac{1}{2}v_3^2.$

这就说明，在一般的数域内，二次型的标准形不是唯一的，而与所作的非退化线性替换有关．但有一点是肯定的，即 在一个二次型的标准形中，系数不为零的平方项的个数是唯一确定的，与所作的线性替换无关．

定义 称二次型矩阵的秩为二次型的秩.

二、复数域的情形

设 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 是一个复系数的二次型.

由本章 定理 1 经过一适当的非退化线性替换后 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 化成标准形. 不妨假设它的标准形是

$$d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \ldots + d_r y_r^2, \quad d_i \neq 0, i = 1, 2, \ldots, r,$$

其中 r 是 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 的矩阵的秩. 因为复数总可以开平方，所以我们再作一非退化线性替换

$$
\begin{cases}
y_1 = \dfrac{1}{\sqrt{d_1}} z_1 \\
\cdots\cdots \\
y_r = \dfrac{1}{\sqrt{d_r}} z_r \\
y_{r+1} = z_{r+1} \\
\cdots\cdots \\
y_n = z_n
\end{cases}
$$

$$d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \ldots + d_ry_r^2, \quad d_i \neq 0, i = 1, 2, \ldots, r,$$

就化成

$$z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_r^2 .$$

上式称为复二次型 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 的**规范形**.

显然规范形完全被原二次型矩阵的秩所决定，因此有

定理 3 任意一个复系数的二次型，经过一适当的非退化线性替换可以化成规范形，且规范形是唯一的.

定理 3′ 任一复数的对称矩阵合同于一个形式为

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ \hline & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

的对角矩阵. 从而有，两个复数对称矩阵合同的充分必要条件是它们的秩相等.

三、实数域的情形

设 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是一个实系数的二次型.

由本章 定理 1 经过一适当的非退化线性替换，再适当排列文字的次序，可使 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 变成标准形

$$d_1y_1^2 + \dots + d_py_p^2 - d_{p+1}y_{p+1}^2 - \dots - d_ry_r^2,$$

其中 $d_i > 0, i = 1, \dots, r$；r 是 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的秩.

因为在实数域中，正实数总可以开平方，所以再作一非退化线性替换

$$
\begin{cases}
y_1 = \dfrac{1}{\sqrt{d_1}} z_1 , \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
y_r = \dfrac{1}{\sqrt{d_r}} z_r , \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
y_{r+1} = z_{r+1} , \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
y_n = z_n ,
\end{cases}
$$

二次型 $d_1y_1^2+\ldots+d_py_p^2-d_{p+1}y_{p+1}^2-\ldots-d_ry_r^2$ 就化成

$$z_1^2+\ldots+z_p^2-z_{p+1}^2-\ldots-z_r^2\,.$$

称之为实二次型 $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ 的**规范形**. 显然规范形完全被 r,p 这两个数所决定. 对于实系数二次型的规范形，我们有以下定理：

定理 4 (惯性定理) 任意一个实数域上的二次型，经过一适当的非退化线性替换可以化成规范形，且规范形是唯一的.

证明　定理的前一半在上面已经证明，下面就来证唯一性.

设实二次型 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 经过非退化线性替换 $X = BY$ 化成规范形

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = y_1^2 + \ldots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \ldots - y_r^2,$$

而经过非退化线性替换 $X = CZ$ 也化成规范形

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = z_1^2 + \ldots + z_q^2 - z_{q+1}^2 - \ldots - z_r^2.$$

现在来证明 $p = q$.

用反证法.　设 $p > q$.

文山學院 WENSHAN UNIVERSITY

由以上假设，我们有

$$y_1^2+\dots+y_p^2-y_{p+1}^2-\dots-y_r^2 = z_1^2+\dots+z_q^2-z_{q+1}^2-\dots-z_r^2,$$

其中

$$Z = C^{-1}BY.$$

令

$$C^{-1}B = G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix},$$

则有
$$\begin{cases} z_1 = g_{11}y_1 + g_{12}y_2 + \cdots + g_{1n}y_n, \\ z_2 = g_{21}y_1 + g_{22}y_2 + \cdots + g_{2n}y_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_n = g_{n1}y_1 + g_{n2}y_2 + \cdots + g_{nn}y_n. \end{cases} \tag{9}$$

为了从等式

$$y_1^2+\ldots+y_p^2-y_{p+1}^2-\ldots-y_r^2 = z_1^2+\ldots+z_q^2-z_{q+1}^2-\ldots-z_r^2$$

中找到矛盾，令 $y_{p+1} = \ldots = y_n = 0$, $z_1 = \ldots = z_q = 0$,

于是可得关于 $y_1,\ldots,y_p, y_{p+1},\ldots, y_n$ 的齐次线性方程组

$$\begin{cases} g_{11}y_1 + g_{12}y_2 + \cdots + g_{1n}y_n = 0, \\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ g_{q1}y_1 + g_{q2}y_2 + \cdots + g_{qn}y_n = 0, \\ y_{p+1} = 0, \\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n = 0. \end{cases} \tag{10}$$

该方程组含有 n 个未知量，而含有

$$q + (n - p) = n - (p - q) < n$$

个方程，由第三章定理 1 知它有非零解.

令 $(y_1,\ldots,y_p,y_{p+1},\ldots,y_n)=(k_1,\ldots,k_p,k_{p+1},\ldots,k_n)$

是一个非零解. 显然

$$k_{p+1}=\ldots=k_n=0\,.$$

这时，等式

$$y_1^2+\ldots+y_p^2-y^2_{p+1}-\ldots-y_r^2=z_1^2+\ldots+z_q^2-z^2_{q+1}-\ldots-z_r^2$$

的左边为

$$k_1^2+k_2^2+\ldots+k_p^2>0\,,$$

而它的右边为

$$-z^2_{q+1}-\ldots-z_r^2\leq 0\,,$$

这是一个矛盾，它说明假设 $p>q$ 是不对的. 因此就有 $p\le q$.

同理可证 $q\le p$， 从而 $p=q$. 这就证明了规范形的唯一性.

定义 6 在实二次型 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 的规范形中，正平方项的个数 p 称为 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 的**正惯性指数**；负平方项的个数 $r-p$ 称为 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 的**负惯性指数**； 它们的差 $p-(r-p)=2p-r$ 称为 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 的**符号差**.

虽然实二次型的标准形不是唯一的，但由上面化成规范形的过程可以看出，标准形中系数为正的平方项的个数是一致的.因此，惯性定理也可以叙述为：

实二次型的标准形中系数为正的平方项的个数是唯一确定的，它等于正惯性指数，而系数为负的平方项的个数就等于负惯性指数.

定理 5 (1) 任一复对称矩阵 A 都合同于一个下述形式的对角矩阵：

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ \hline & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

其中对角线上 1 的个数 r 等于 A 的秩.

(2) 任一实对称矩阵 A 都合同于一个下述形式的对角矩阵：

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_p & & \\ & -E_{r-p} & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

其中对角线上 1 的个数 p 及 -1 的个数 $r-p$ (r 是 A 的秩)都是唯一确定的，分别称为 A 的正、负惯性指数. 它们的差 $2p-r$ 称为 A 的符号差.

例1 在实数域和复数域化二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$$

为规范形，其正惯性指数、负惯性指数、符号差、秩.

例2 在实数域和复数域化二次型

$$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x_1^2-3x_2^2-2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$$

为规范形，其正惯性指数、负惯性指数、符号差、秩.