文山學院 WENSHAN UNIVERSITY

第 二 章　　行 列 式

第二章　行　列　式

第一节　引　言

主要内容

- 前言
- 引例

一、前言

录制中

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 8, \\ 4x_1 + 6x_2 = 9. \end{cases}$$

$$(4x_1 + 6x_2 = 16)$$

无解

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 4, \\ 4x_1 + 6x_2 = 8. \end{cases}$$

$$(2x_1 + 3x_2 = 4)$$

无穷多解

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 8, \\ 3x_1 + 5x_2 = 13. \end{cases}$$

$$x_1 = 1, x_2 = 2$$

唯一解

文山學院 WENSHAN UNIVERSITY

二、引例

引例 用消元法解二元线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 , \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 , \end{cases}$

解 用加减消元法，可得

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，求得方程组（1）的解为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}, \\ x_2 = \dfrac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}, \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

并称之为**二阶行列式**. 其中 a_{ij} 称为行列式的**元素**，

a_{ij} 的两个下标表示该元素在行列式中的位置，

第一个下标称为**行标**，　表示该元素所在的行，

第二个下标称为**列标**，表示该元素所在的列，

称 a_{ij} 为行列式的（i , j）元素.

由二阶行列式的定义，（2）式中 x_1、x_2

分子也可写成二阶行列式，即

$$b_1a_{22}-a_{12}b_2=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad a_{11}b_2-b_1a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

若记 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, $D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$, $D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$,

则当 $D\neq 0$时，方程组（1）有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D}, \qquad x_2=\frac{D_2}{D}.$$

注意： D称为系数行列式，

D_j是用常数项b_1、b_2替换

D中的第 j 列 (j=1,2)

例1 求解二元线

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 12, \\ 2x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$$

解

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3-(-4) = 7 \neq 0,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 12 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 14, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -21,$$

$$\therefore x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{14}{7} = 2, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-21}{7} = -3.$$

类似地, 在求解三元线性方程组时, 为了记忆其求解公式,

三阶行列式的定义如下:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

三阶行列式的展开式也可用对角线法得到,

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

三阶行列式的计算

沙路法 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$

$-\quad -\quad -\quad +\quad +\quad +$

$$D= a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

例 2 计算三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

解 由对角线法，得

$$D=1\times1\times(-1)+(-2)\times(-3)\times(-1)+1\times2\times1$$

$$-1\times(-3)\times1-(-2)\times2\times(-1)-1\times1\times(-1)$$

$$=-1-6+2+3-4+1$$

$$=-5.$$

利用三阶行列式求解三元线性方程组

如果三元线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$

的系数行列式 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0,$

则三元线性方程组的解为:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}.$$

例3 求解方程 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix} = 0.$

例4 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = -2, \\ 2x_1 + x_2 + -3x_3 = 1, \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

小结和作业

1. 如何计算二阶和三阶行列式？

2.2个未知量2个方程的线性方程组系数行列式不为零时，解这种类型的方程除了消元法之外有没有其它方法。对于3个未知量3个方程的线性方程组是否有类似的方法求解方程？

3.作业见学习通.