

因式分解的唯一性定理 数域 P 上每一个次数 ≥ 1 的多项式 $f(x)$ 都可以**唯一**地分解成数域 P 上一些不可约多项式的乘积. $f(x) = cp_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_s^{r_s}(x)$.

$$\frac{f(x)}{(f(x), f'(x))} = cp_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x).$$

第八节 复系数与实系数

多项式的因式分解

主要内容

- 代数基本定理
- 复系数多项式因式分解定理
- 实系数多项式因式分解定理

一、代数基本定理

代数基本定理 每个次数 ≥ 1 的复系数多项式

在复数域中有一根.

定理 8 代数基本定理显然可以等价地叙述为：
在数域 P 中的根不可能多于 n 个，重根按重数计算.

每个次数 ≥ 1 的复系数多项式，在复数域上一定有一个一次因式.

- 问：**
1. 在复数域上所有次数大于 1 的多项式的可约性？
 2. 复数域上不可约多项式的类型有哪些？

二、复系数多项式因式分解定理

每个次数 ≥ 1 的复系数多项式在复数域上都可以唯一地分解成一次因式的乘积.

因此，复系数多项式具有标准分解式

$$f(x) = a_n (x - \alpha_1)^{l_1} (x - \alpha_2)^{l_2} \cdots (x - \alpha_s)^{l_s},$$

其中 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 是不同的复数, l_1, l_2, \dots, l_s

是正整数. 标准分解式说明了

每个 n 次复系数多项式恰有 n 个复根(重根按重数计算).

三、实系数多项式因式分解定理

如果 α 是实系数多项式 $f(x)$ 的复根，那么 α 的共轭数 $\bar{\alpha}$ 是不是 $f(x)$ 的根？

设 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ ，其中 a_0, a_1, \dots, a_n 是实数.

由 α 是实系数多项式 $f(x)$ 的复根得：

$$f(\alpha) = a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \dots + a_0 = 0.$$

两边取共轭数，有

$$f(\bar{\alpha}) = a_n \bar{\alpha}^n + a_{n-1} \bar{\alpha}^{n-1} + \dots + a_0 = 0,$$

这就是说， $f(\bar{\alpha}) = 0$ ， $\bar{\alpha}$ 也是 $f(x)$ 的根.

实系数多项式因式分解定理

每个次数 ≥ 1 的实系数多项式在实数域上都可以唯一地分解成一次因式与二次不可约因式的乘积.

证明 定理对一次多项式显然成立.

假设定理对次数 $< n$ 的多项式已经证明.

设 $f(x)$ 是 n 次实系数多项式. 由代数学基本定理

$f(x)$ 有一复根 α . 若 α 是实数, 则 $f(x) = (x - \alpha) f_1(x)$,

其中 $f_1(x)$ 是 $n - 1$ 次实系数多项式.

若 α 不是实数, 则 $\bar{\alpha}$ 也是 $f(x)$ 的根且 $\bar{\alpha} \neq \alpha$.

于是 $f(x) = (x - \alpha)(x - \bar{\alpha})f_2(x)$.

显然 $(x - \alpha)(x - \bar{\alpha}) = x^2 - (\alpha + \bar{\alpha})x + \alpha\bar{\alpha}$ 是一实系数二次不可约多项式. 从而 $f_2(x)$ 是 $n - 2$ 次实系数多项式.

由归纳法假设, $f_1(x)$ 或 $f_2(x)$ 可以分解成一次与二次不可约多项式的乘积, 因而 $f(x)$ 也可以如此分解.

证毕

因此，实系数多项式具有标准分解式

$$f(x) = a_n (x - c_1)^{l_1} \cdots (x - c_s)^{l_s} (x^2 + p_1 x + q_1)^{k_1} \cdots (x^2 + p_r x + q_r)^{k_r},$$

其中 $c_1, \dots, c_s, p_1, \dots, p_r, q_1, \dots, q_r$ 全是实数，

$l_1, \dots, l_s, k_1, \dots, k_r$ 是正整数，并且

$$x^2 + p_i x + q_i \quad (i = 1, 2, \dots, r)$$

是不可约的，也就是适合条件

$$p_i^2 - 4q_i < 0, \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

小结和作业

- 1.请叙述代数学基本定理?
- 2.复数域和实数域上的不可约多项式分别有哪些?
- 3.作业见学习通.