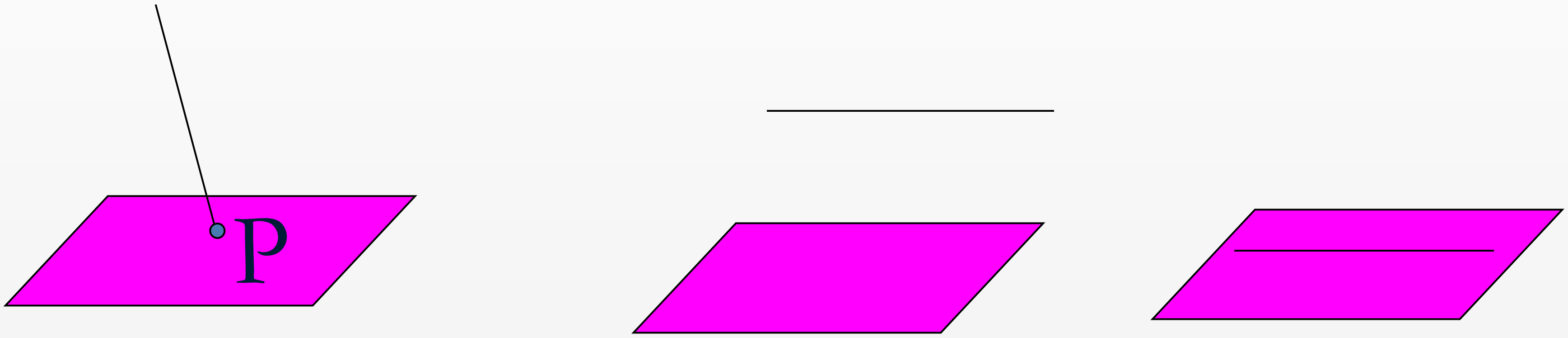
# §3.5 直线与平面的相关位置

# 空间直线与平面的三种位置关系：




相交　　　　平行　　　　直线在平面上

**想一想：空间直线与平面的位置关系有哪些?**

**思考：如何判定以上三种相关位置呢?**

## 1.直线与平面的相关位置成立的条件

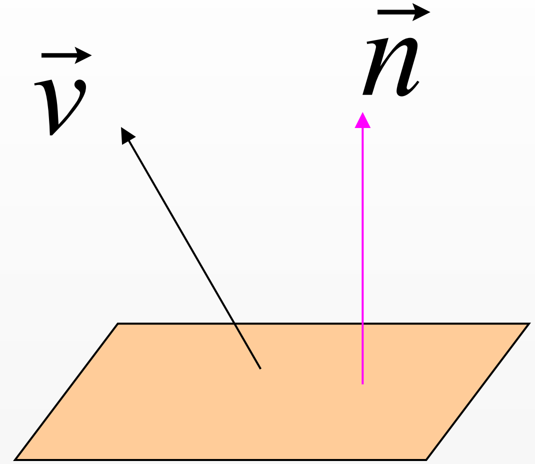
设直线$l$与平面$\pi$的方程分别为：

$$l: \quad \frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y}=\frac{z-z_0}{Z}, \qquad (1)$$

$$\Pi: \quad Ax+By+Cz+D=0, \qquad (2)$$

因为直线$l$的方向向量为$\vec{v}=\{X,Y,Z\}$,$P_0(x_0,y_0,z_0)\in l$,平面$\pi$的法向量$\vec{n}=\{A,B,C\}$,所以在直角坐标系下,从几何上看，如下图所示：

(1)$l$与$\pi$的相交条件：

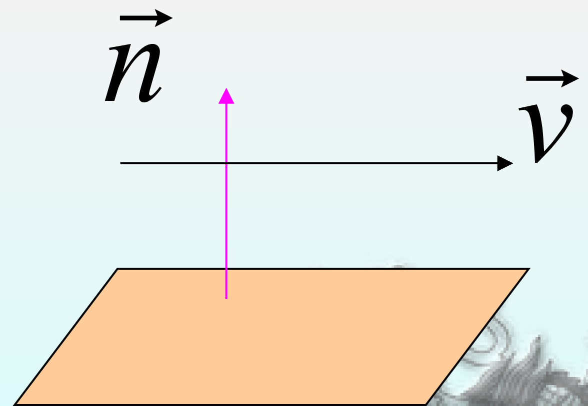



相交

$$AX + BY + CZ \neq 0$$

即$\vec{v}$不垂直于$\vec{n}$；

（2）$l$与$\pi$的平行条件：




平行

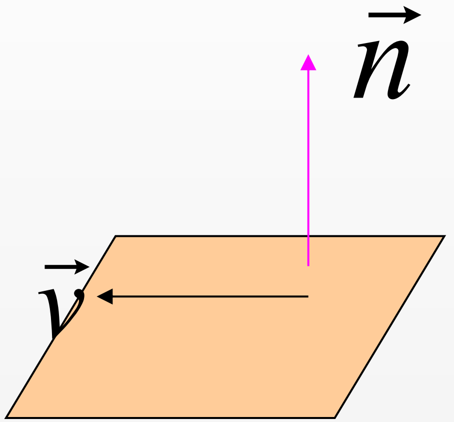
$$AX + BY + CZ = 0,$$

$$Ax_0 + \mathrm{B}y_0 + \mathrm{C}z_0 + \mathrm{D} \neq 0$$

即$\vec{v} \perp \vec{n}$,且$l$上的点$(x_0, y_0, z_0)$不在$\pi$上;

（3）$l$在$\pi$上的条件：

$$AX+BY+CZ=0,$$
$$Ax_0+\mathrm{B}y_0+\mathrm{C}z_0+\mathrm{D}=0$$



直线在平面上

即$\vec{v}\perp\vec{n}$,且$l$上的点$(x_0,y_0,z_0)$在$\pi$上.

定理3.5.1 直线(1)与平面(2)的相关位置关系有如下充要条件

$1^\circ$ 相交:

$$AX+BY+CZ\neq 0; \qquad (3.5\text{-}1)$$

$2^\circ$ 平行:

$$AX+BY+CZ=0,\text{且}$$
$$Ax_0+\mathrm{B}y_0+\mathrm{C}z_0+\mathrm{D}\neq 0; \qquad (3.5\text{-}2)$$

$3^\circ$ 直线在平面上:

$$AX+BY+CZ=0,\text{且}$$
$$Ax_0+\mathrm{B}y_0+\mathrm{C}z_0+\mathrm{D}=0. \qquad (3.5\text{-}3)$$

## 2.直线与平面的交点

设直线$l$与平面$\pi$的方程分别为：

$$l: \quad \frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y}=\frac{z-z_0}{Z}, \qquad (3)$$

$$\Pi: \quad Ax+By+Cz+D=0, \qquad (4)$$

第一步：将$l$的方程改写成参数式：

$$\begin{cases} x=x_0+Xt, \\ y=y_0+Yt, \\ z=z_0+Zt. \end{cases}$$ 其中t为参数. (5)

问：怎样求$l$与$\pi$的交点呢？

第二步：把(5)式代入(4)式，整理得

$$(AX+BY+CZ)t=-(Ax_0+By_0+Cz_0+D), \qquad (6)$$

$$t=-\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{AX+BY+CZ}, \qquad (7)$$

第三步：将 (7)代入 (5)式,即得 $l$与 $\pi$的交点坐标.

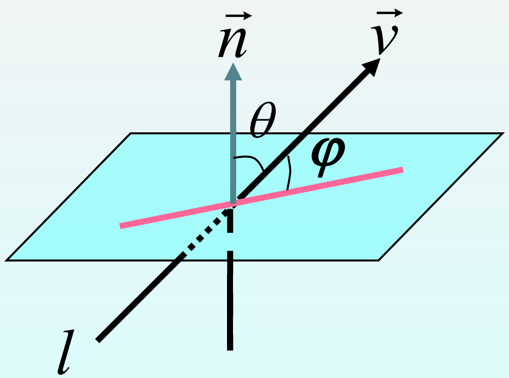
## 3. 空间直线与平面的夹角

以下讨论在直角坐标系下进行

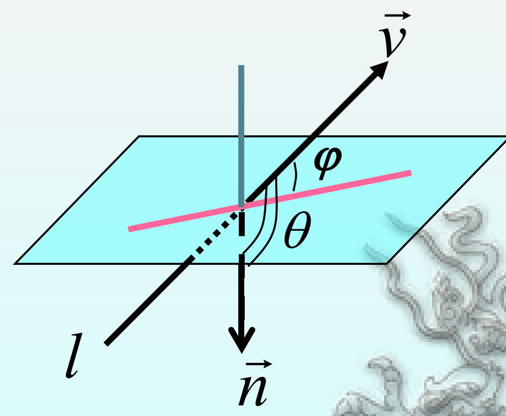
**定义**　**直线和它在平面上的投影直线的夹角$\varphi$ 称为直线与平面的夹角.**

$$0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}.$$

(当直线垂直于平面时,规定$\varphi = \frac{\pi}{2}$)




$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \theta$$




$$\varphi = \theta - \frac{\pi}{2}$$

思考：一般的直线与平面的夹角呢？

设$\angle(\vec{n},\vec{v})=\theta\ (0\le\theta\le\pi)$,则$\varphi=\left|\frac{\pi}{2}-\theta\right|$,故

$$\sin\varphi=|\cos\theta|=\frac{|\vec{n}\cdot\vec{v}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{v}|}$$

$$=\frac{|AX+BY+CZ|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}},\qquad(3.5\text{-}4)$$

思考：直线与平面的夹角公式？

从而有

$$l//\pi\ \text{或}\ l\text{在}\pi\text{上}\Longleftrightarrow AX+BY+CZ=0;\qquad(3.5\text{-}5)$$

$$l\perp\pi\Longleftrightarrow\vec{v}//\vec{n}\Longleftrightarrow\frac{A}{X}=\frac{B}{Y}=\frac{C}{Z}.\qquad(3.5\text{-}6)$$

## 4. 应用举例

例 判断直线$l$：$\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{2}$与平面$\pi$：$2x+y-z-3=0$的相关位置；若相交，求出它们的交点和夹角.

解 $\because$ $\vec{v}=\{-1,1,2\}$， $\vec{n}=\{2,1,-1\}$，则

$$\vec{n}\cdot\vec{v}=2\times(-1)+1\times1-1\times2=-3\neq0$$

$\therefore$ 直线与平面相交.

又直线的坐标式参数方程为：$\begin{cases} x=-t_0 \\ y=1+t_0 \\ z=1+2t_0 \end{cases}$

设交点处对应的参数为 $t_0$ ，

$$\therefore \quad 2\times(-t_0)+(1+t_0)-(1+2t_0)-3=0$$

$\therefore\ t_0=-1$，从而交点为（1，0，−1）.

又　　设直线 $l$ 与平面 $\pi$ 的交角为 $\theta$ ，则：

$$\sin\theta=\frac{|\vec{n}\cdot\vec{v}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{v}|}=\frac{|2\times(-1)+1\times1-1\times2|}{\sqrt{6}\times\sqrt{6}}=\frac{1}{2},$$

$$\therefore\quad \theta=\frac{\pi}{6}.$$

# 5. 课堂小结

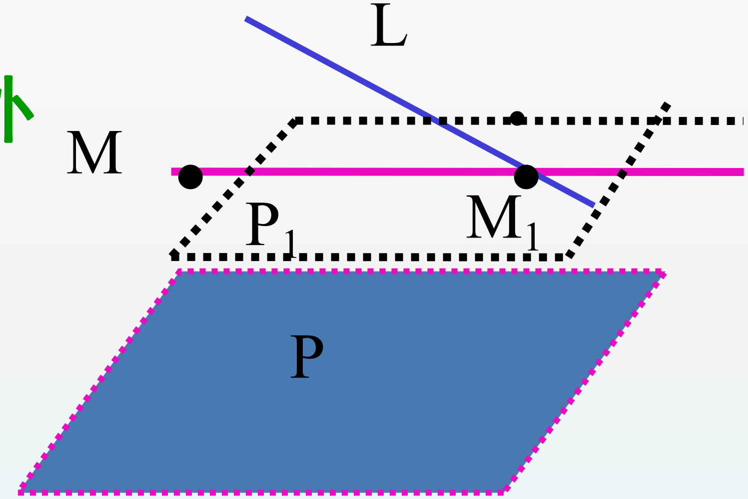
（1）直线与平面分别相交、平行和直线在平面上的代数判断依据；

（2）空间直线与平面的交点和夹角的计算.

**例2** 求过点 M (-1,2,-3), 且平行于平面

$P: 6x-2y-3z+1=0$, 又与直线

$$L: \frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{-5}$$,相交的直线方程.




**分析**: 关键是求得直线上另外一个点 $M_1$. $M_1$在过M且平行于 平面 P 的一个平面$P_1$上, 待求直线又与已知直线相交, 交点既在$P_1$上, 又在 L上, 因此是L与$P_1$的交点.

**解** 过M作平行于 平面 P 的一个平面$P_1$

$P_1$: $6(x+1)-2(y-2)-3(z+3)=0$

即$P_1$: $6x-2y-3z+1=0$

求平面 $P_1$与已知直线 L的交点

$$\begin{cases} 6x-2y-3z+1=0 \\ \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-3}{-5}=t \end{cases}$$

解得，$t=0, M_1(1,-1,3)$，

$$\vec{s}=\overrightarrow{MM_1}=\{2,-3,6\},$$

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z+3}{6}$$

## 思考题：

当直线与平面平行时，怎样计算他们之间的距离呢？

## 6.作业