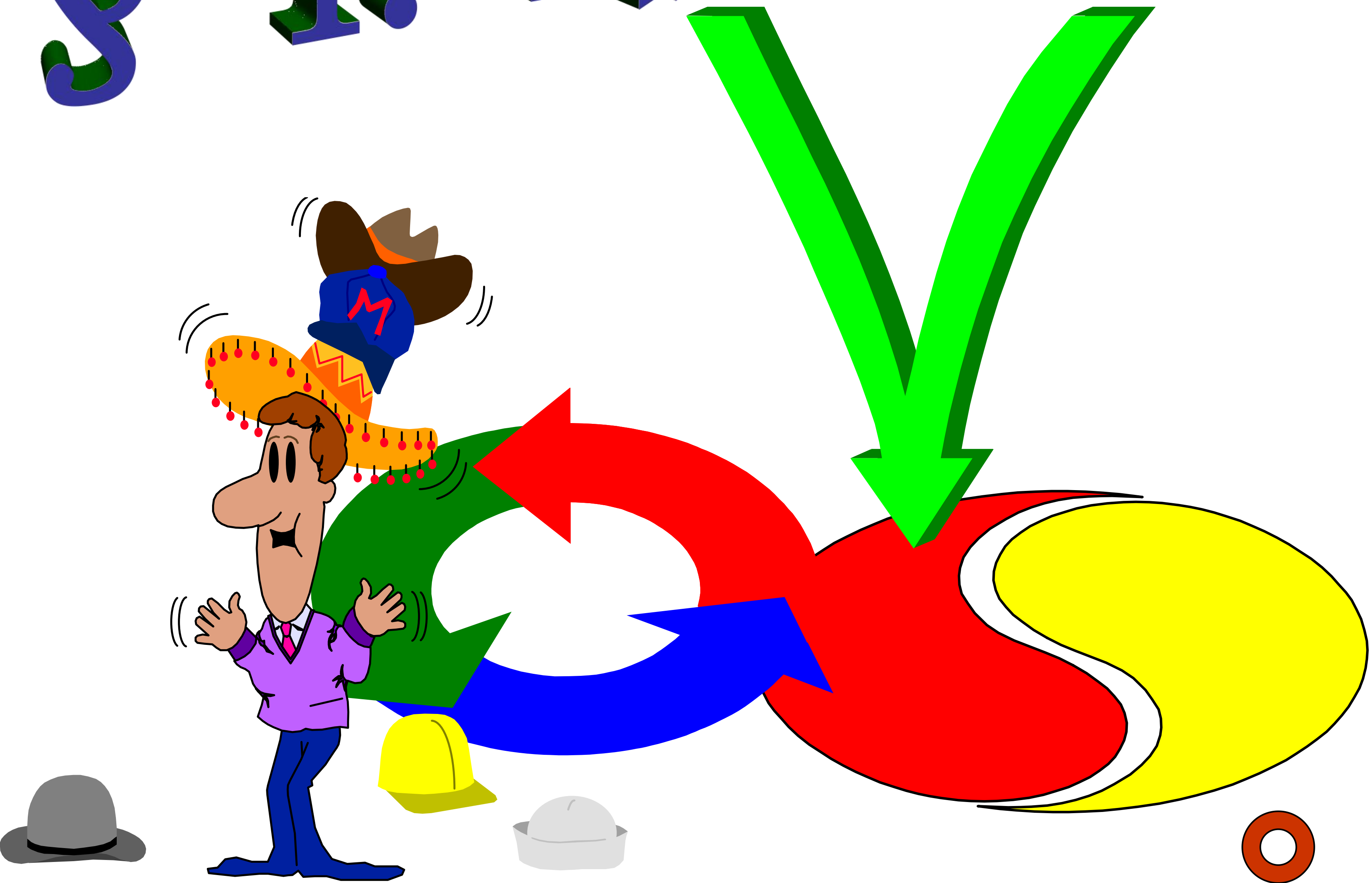
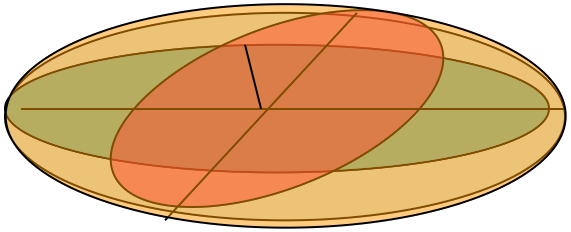
§4.4椭球面



一.定义:在直角坐标系下,由方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

一般设 $a \ge b \ge c \ge 0$



所表示的曲面叫做椭球面或椭圆面.此方程

称为椭球面的标准方程.其中a,b,c为正常数.

1.对称性：显然，点 $(\pm x,\pm y,\pm z)$ 满足方程

因此椭球面关于三坐标平面对称;关于

三坐标轴及坐标原点也对称.

它们分别称为:

椭球面的对称平面、对称轴与对称中心.

也称之为主平面、主轴与中心.

2. 椭球面与它的对称轴的交点为 $(\pm a, 0, 0)$

$(0, \pm b, 0)$, $(0, 0, \pm c)$

它们叫做椭球面的顶点

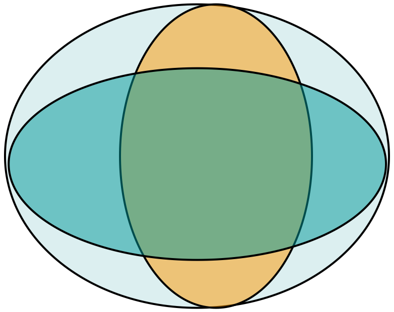
2a, 2b, 2c叫做椭球面的轴，轴的一半,a, b ,c称为半轴

当a >b >c时，称2a, 2b ,2c为长轴,中轴和短轴.

称a, b ,c为长半轴,中半轴和短半轴.

几种特殊情况

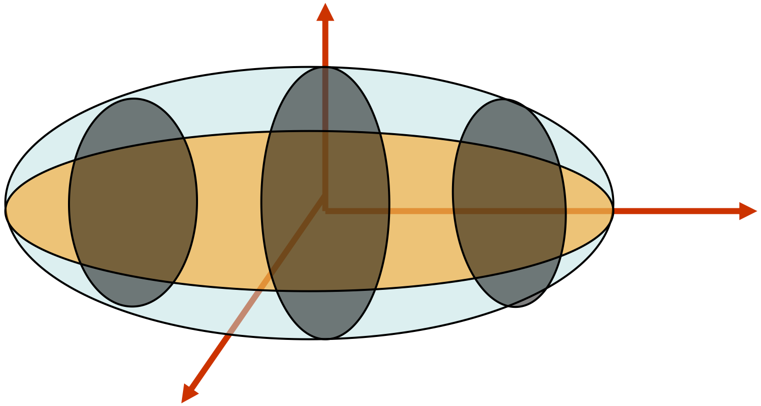
1. 若a=b=c,方程变为 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$



椭球面变为球面

2.若有两轴相等,比如 $b=c\neq a$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$



椭球面变为长形旋转椭球面

几种特殊情况：

例如: $a=b$, $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$ 旋转椭球面

由椭圆 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ y=0\end{cases}$ 绕 z 轴旋转而成

方程可写为 $$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

旋转椭球面与椭球面的区别：

与平面 $z = z_1\ (|z_1| < c)$ 的交线为圆

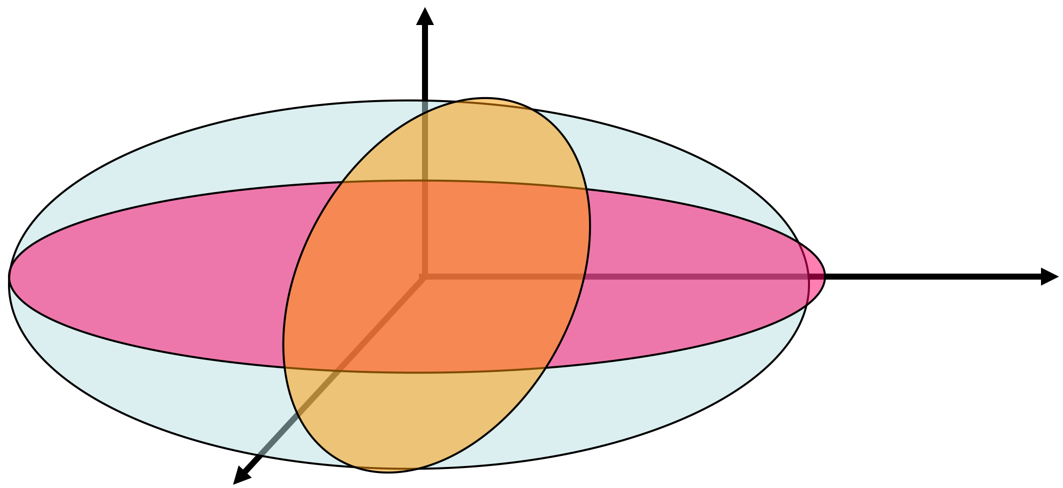
截面上圆的方程 $\begin{cases} x^2 + y^2 = \dfrac{a^2}{c^2}(c^2 - z_1^2) \\ z = z_1 \end{cases}.$

上一页

返回

3.若任何两轴不等,则称为三轴椭球面.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 ----(4.1-1)$$



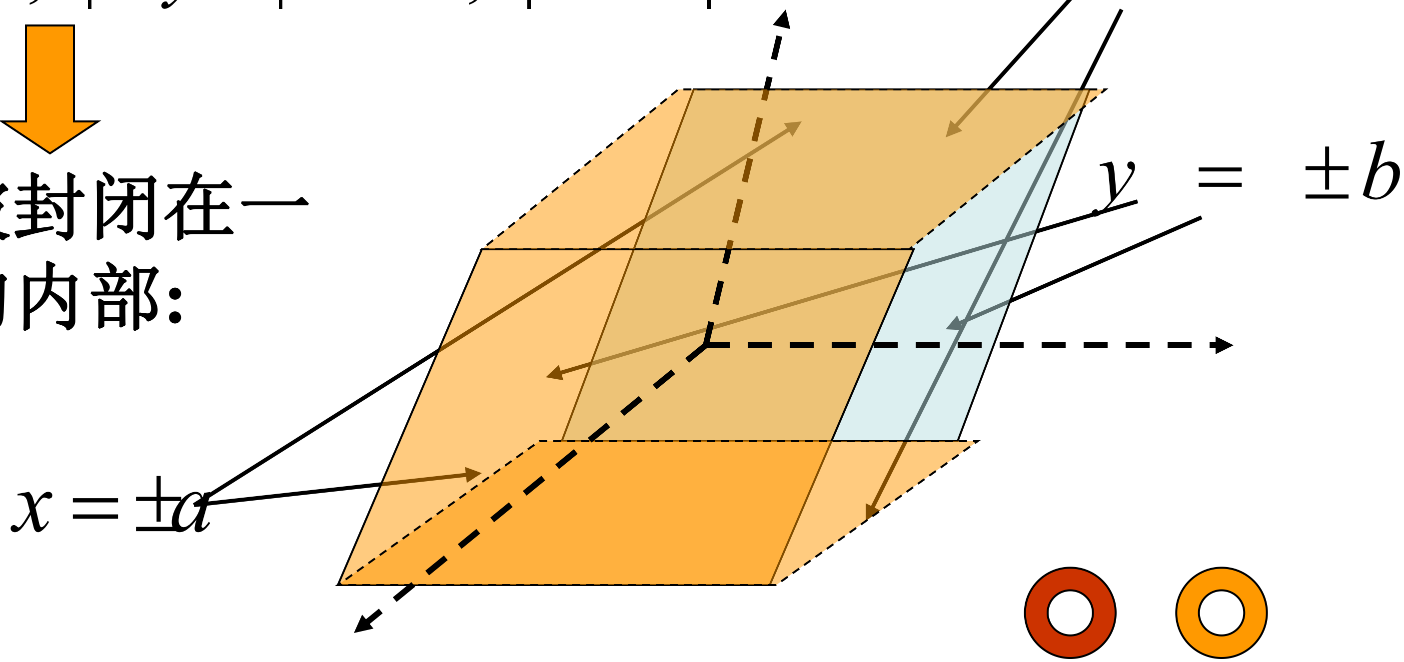
椭球面图象的范围

由方程:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad ----(4.1-1)$$

$$|x| \le a,\ |y| \le b,\ |z| \le c$$

即椭球面被封闭在一个长方体的内部:

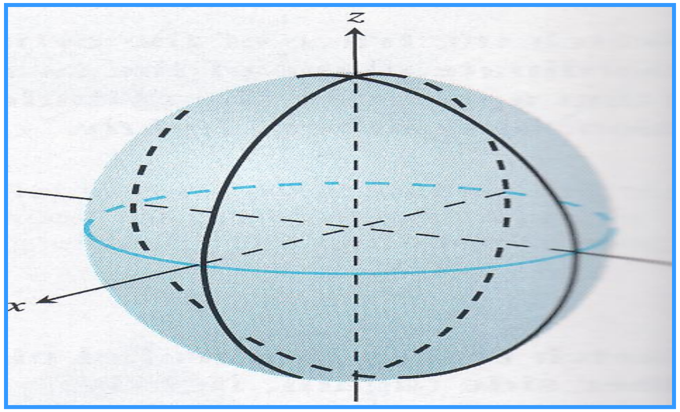


二. 平行截割法

为了能够了解曲面的大体形状,一般考虑曲面与一组平行平面的交线,当这些交线的形状已经清楚时,曲面的大致形状也就出来了，这种方法称为平行截割法。一般，这组平行平面取为与坐标面平行的平面。

椭球面的方程

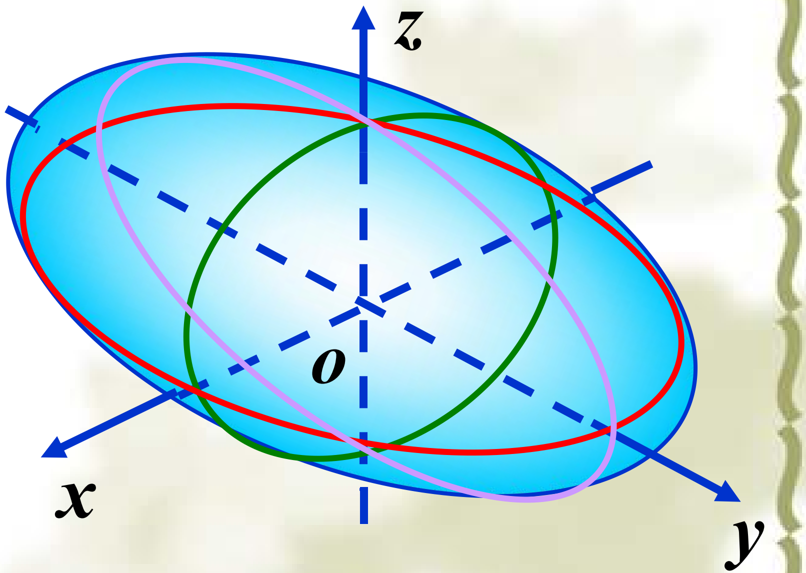
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$ 椭球面



椭球面与三个坐标平面的交线：

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, \\ z=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1, \\ y=0\end{cases} \qquad \begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1. \\ x=0\end{cases}$$



用$x=0, y=0, z=0$来截椭球面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad --(4.1-1)$$

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\\ z=0\end{cases} \qquad \begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ y=0\end{cases} \qquad \begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ x=0\end{cases}$$

它们都称为椭球面的主椭圆

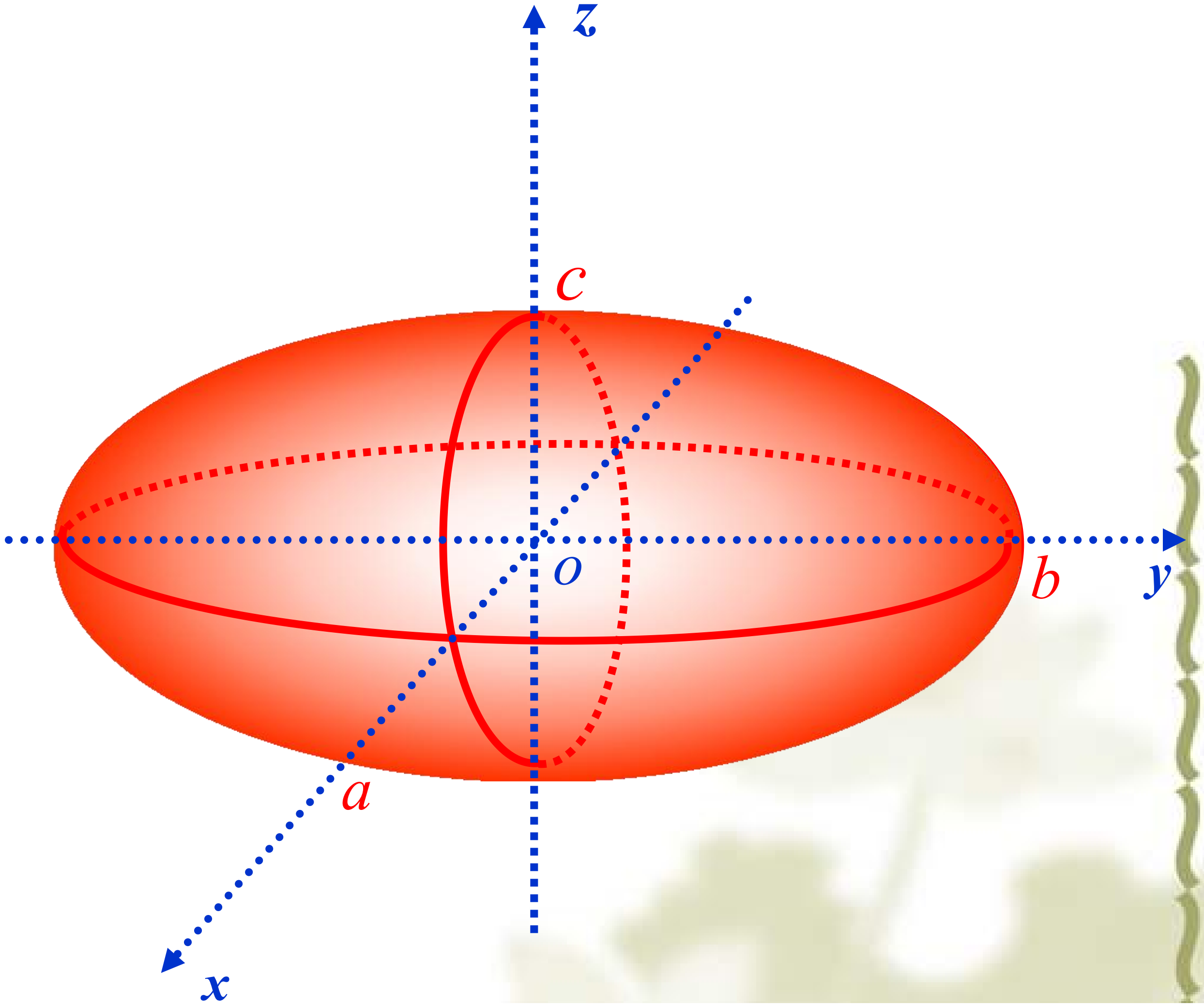
平行截割法:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

用$z=h$截曲面

用$y=m$截曲面

用$x=n$截曲面



椭圆截面的大小随平面位置的变化而变化，因此椭球面可以看成是由一个椭圆的变动（大小位置都改变）而产生。

以平行于XOY平面的一组平行平面

z=h为例来截割椭球面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 ----(4.1-1)$$

截线方程为

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad --(4.1-1) \\ z=h \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2} \\ z=h \end{cases}$$

(1) |h|>c,无交线

(2) |h|<c,交线方程为

$$\begin{cases} \frac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right)^2}=1 \\ z=h \end{cases}$$

(3)当 |h|=c 时,交线退缩为一点(0,0,c)或(0,0,-c)

现在研究Z=h 平面上的椭圆

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\dfrac{h^2}{c^2}}\right)^2}+\dfrac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\dfrac{h^2}{c^2}}\right)^2}=1 \\ z=h, \qquad |h|<c \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\dfrac{h^2}{c^2}}\right)^2} + \dfrac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\dfrac{h^2}{c^2}}\right)^2} = 1 \\ z=h, \qquad |h|<c \end{cases}$$

(1)半轴的长

$$a(\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}})及b(\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}})$$

(2)半轴的顶点坐标为

注意:三维空间中点的坐标是三个有序数组

$$(\pm a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}},0,\ h),\ (0,\ ,\pm b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}},\ h)$$

问题:

$$\left(\pm a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}},0\ ,h\ \right),\left(0,\ ,\pm b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}},h\ \right)$$

它们是否在主椭圆

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ y=0\end{cases}$$

和

$$\begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ x=0\end{cases}$$

上?

将顶点坐标: $(\pm a\sqrt{1-\dfrac{h^2}{c^2}},0,\ h),\ (0,\ ,\pm b\sqrt{1-\dfrac{h^2}{c^2}},\ h)$

分别代入下列方程验证

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ y=0\end{cases}\quad \text{及}\quad \begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ x=0\end{cases}\quad \text{得}$$

$$\frac{(\pm a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}})^2}{a^2}+\frac{h^2}{c^2}=\frac{a^2(1-\frac{h^2}{c^2})}{a^2}+\frac{h^2}{c^2}=1-\frac{h^2}{c^2}+\frac{h^2}{c^2}=1$$

$$\frac{(\pm b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}})^2}{b^2}+\frac{h^2}{c^2}=\frac{b^2(1-\frac{h^2}{c^2})}{b^2}+\frac{h^2}{c^2}=1-\frac{h^2}{c^2}+\frac{h^2}{c^2}=1$$

说明椭圆 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\dfrac{h^2}{c^2}}\right)^2} + \dfrac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\dfrac{h^2}{c^2}}\right)^2} = 1 \\ z=h, \qquad |h|<c \end{cases}$

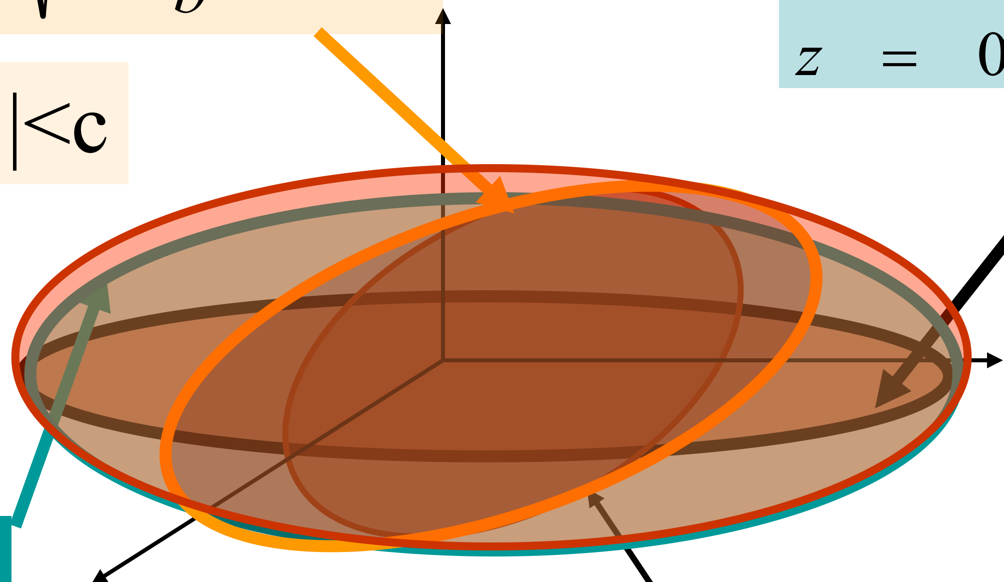
的四个顶点: $\left(\pm a\sqrt{1-\dfrac{h^2}{c^2}}, 0, h\right), \left(0, \pm b\sqrt{1-\dfrac{h^2}{c^2}}, h\right)$

分别在 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases}$

这两个主椭圆上.

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\dfrac{h^2}{b^2}}\right)^2} + \dfrac{z^2}{\left(c\sqrt{1-\dfrac{h^2}{b^2}}\right)^2} = 1 \\ y=h, \qquad |\, h \,|<c \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

三、椭球面的参数方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x=a\cos\theta\cos\varphi \\ y=b\sin\theta\sin\varphi \\ z=c\sin\theta \end{cases}\left(-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2},0\le\varphi<2\pi\right)$$

例1.已知椭球面的轴与三坐标轴重合，且通过椭圆 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}=1 \\ z=0 \end{cases}$ 与点 $M\left(1,2\sqrt{23}\right)$ ，求这个椭球面的方程？

例2 **P162 5**

一直线分别交坐标面yOz, zOx, xOy 于A, B, C 三点，当直线变动时，直线上的三定点A, B, C 也分别在三个坐标面上变动，另外直线上有第四个点P ，它与A, B, C 三点的距离分别为a, b, c ，当直线按照这样的规定（即保持A, B, C 分别在三坐标面上）变动时，P 点的轨迹为椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$