广州电视塔

工厂冷却塔

4.5单叶双曲面

主讲人：邹 敏

一、单叶双曲面的概念

1. 定义　在直角坐标系下，由方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

所表示的曲面叫做单叶双曲面。

单叶双曲面的标准方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

其中**a,b,c**为正常数

方程左边三项,两正一负,右边为**1**

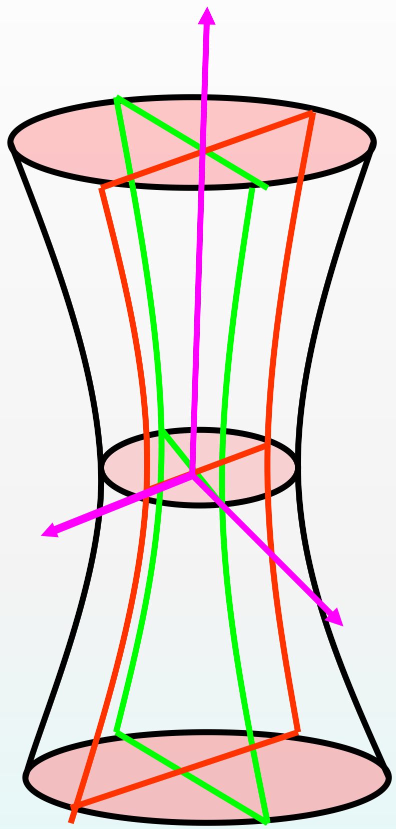
特征:

注：在直角坐标系下，方程

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \text{与} -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

所表示的图形也是单叶双曲面.

单叶双曲面的基本图形



二、单叶双曲面的性质

1. 对称性

单叶双曲面关于三坐标平面，三坐标轴，坐标原点都对称

事实上,如果(x,y,z)满足方程,则

(1) (x,y,-z)满足方程. 所以方程的图象关于**xoy**面对称.同理关于**yoz**面、**xoz**面也对称.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

二、单叶双曲面的性质

1. 对称性

单叶双曲面关于三坐标平面, 三坐标轴, 坐标原点都对称

(2)　(x,-y,-z)满足方程. 所以方程的图象关于x轴对称.同理关于y轴、z轴也对称.

(3)　(-x,-y,-z)满足方程. 所以方程的图象关于原点对称.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

二、单叶双曲面的性质

2. 交点

(令两个坐标为零,代入方程解第三个坐标)

与x轴交点:(±a,0,0)

与 y轴交点:(0,±b,0)

以上四点称为单叶双曲面的四个顶点

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

点(0,0,z)，　(0,0,0)不满足方程

单叶双曲面与z轴不相交

且不通过坐标原点.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

三、单叶双曲面与坐标平面的交线

(1) 用$z = 0$截曲面

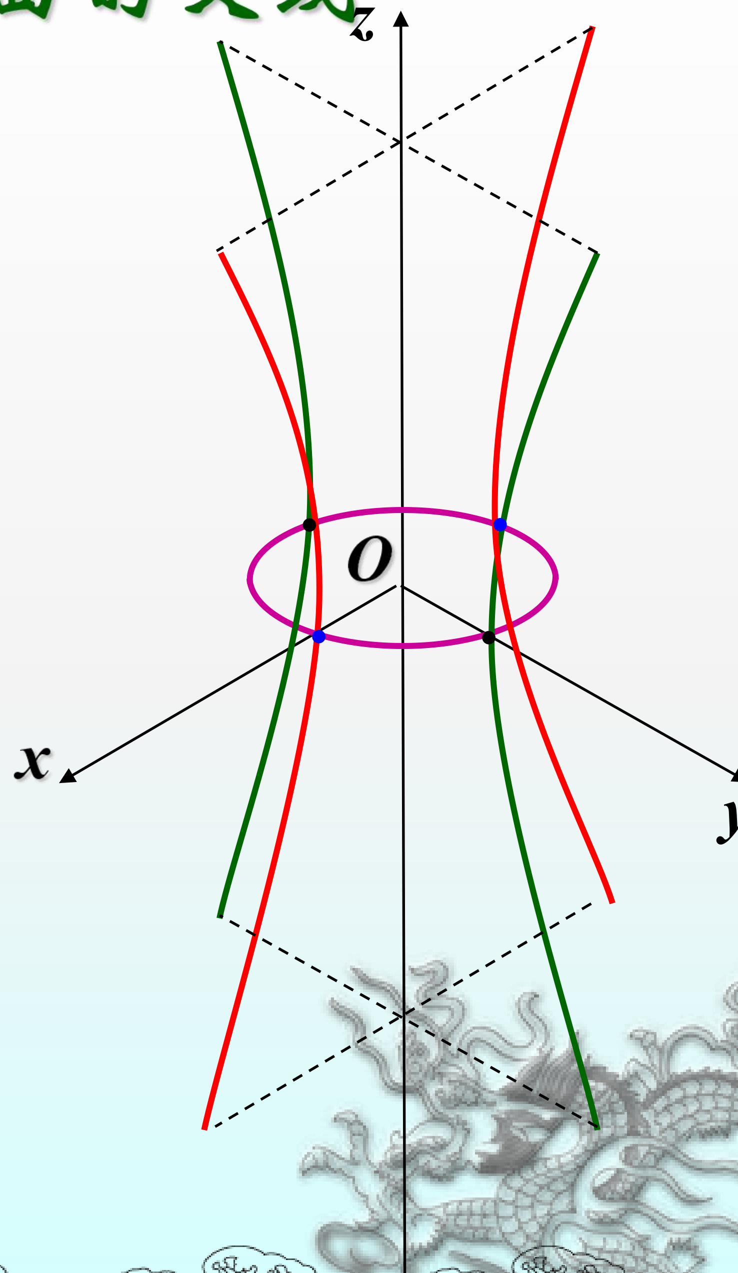
$$C_{z=0}:\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, & (\text{腰椭圆})\\ z=0;\end{cases}$$

(2) 用$y = 0$截曲面

$$C_{y=0}:\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1, & (\text{双曲线})\\ y=0;\end{cases}$$

(3) 用$x = 0$截曲面

$$C_{x=0}:\begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1, & (\text{双曲线})\\ x=0.\end{cases}$$



四、用平行于坐标平面的平面截割

1.用平面z=h 去截单叶双曲面

则截线方程为

令Z=h

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{h^2}{c^2} + 1 \\ Z=h \end{cases}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

将截线方程 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{h^2}{c^2}+1 \\ \mathbf{Z=h} \end{cases}$

变形为

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{\left(a\sqrt{\dfrac{h^2}{c^2}+1}\right)^2}+\dfrac{y^2}{\left(b\sqrt{\dfrac{h^2}{c^2}+1}\right)^2}=1 \\ Z=h \end{cases}$$

交线为平面Z=h上的椭圆:

椭圆 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{\left(a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}+1}\right)^2}+\dfrac{y^2}{\left(b\sqrt{\frac{h^2}{c^2}+1}\right)^2}=1 \\ Z=h \end{cases}$

半轴为 $\Rightarrow$ $a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}+1},\ b\sqrt{\frac{h^2}{c^2}+1}$

顶点坐标为

$$\Downarrow$$

$$\left(\pm a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}+1},0,h\right),\left(0,\pm b\sqrt{\frac{h^2}{c^2}+1},h\right)$$

将顶点坐标: $(\pm a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}},0,h),(0,,\pm b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}},h)$

分别代入下列方程验证

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \\ y=0 \end{cases}$$

及

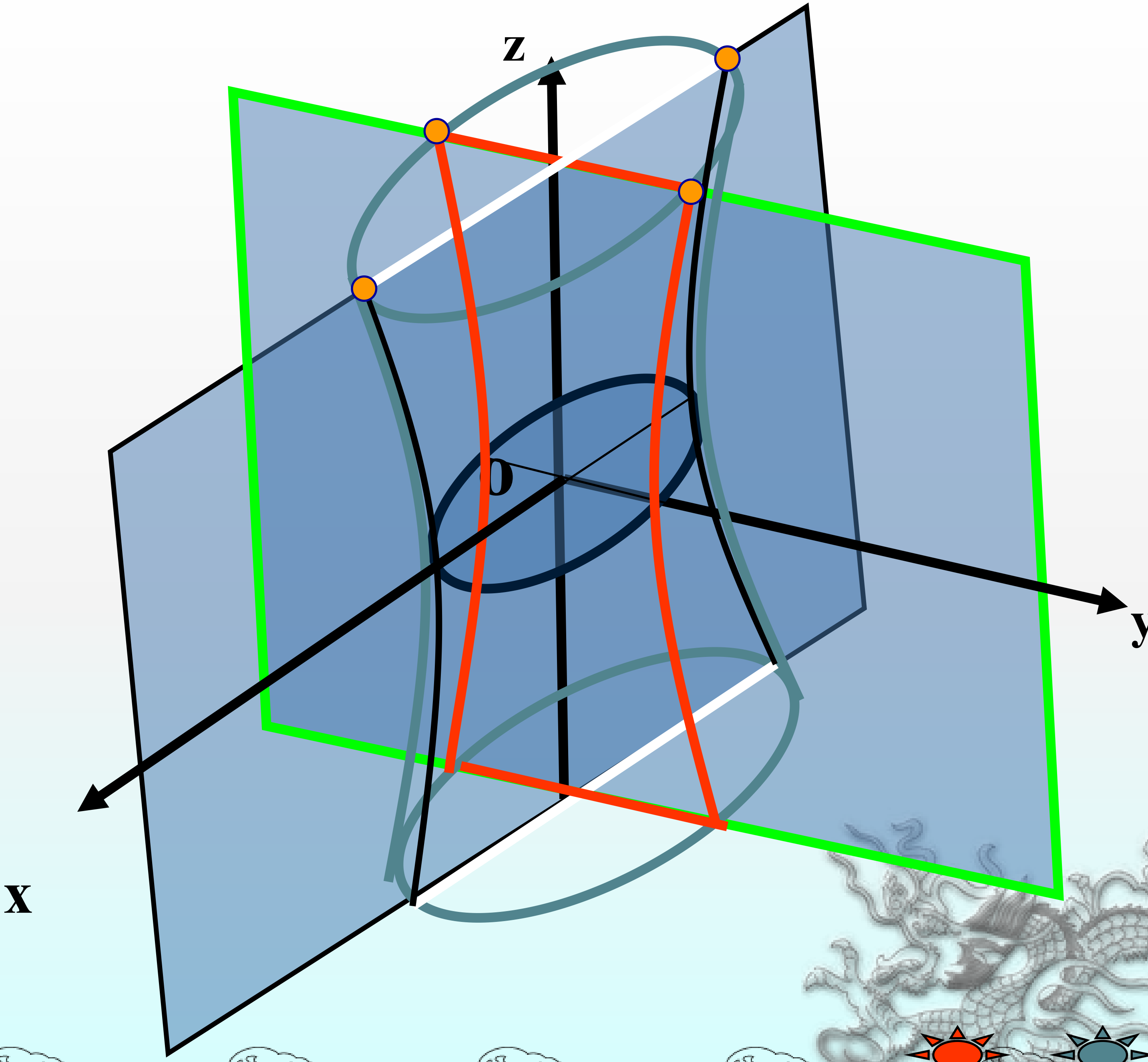
$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \\ x=0 \end{cases}$$

说明椭圆 $\left\{\begin{array}{l}\dfrac{x^2}{\left(a\sqrt{1+\dfrac{h^2}{c^2}}\right)^2}+\dfrac{y^2}{\left(b\sqrt{1+\dfrac{h^2}{c^2}}\right)^2}=1\\ z=h, \qquad |h|<c\end{array}\right.$

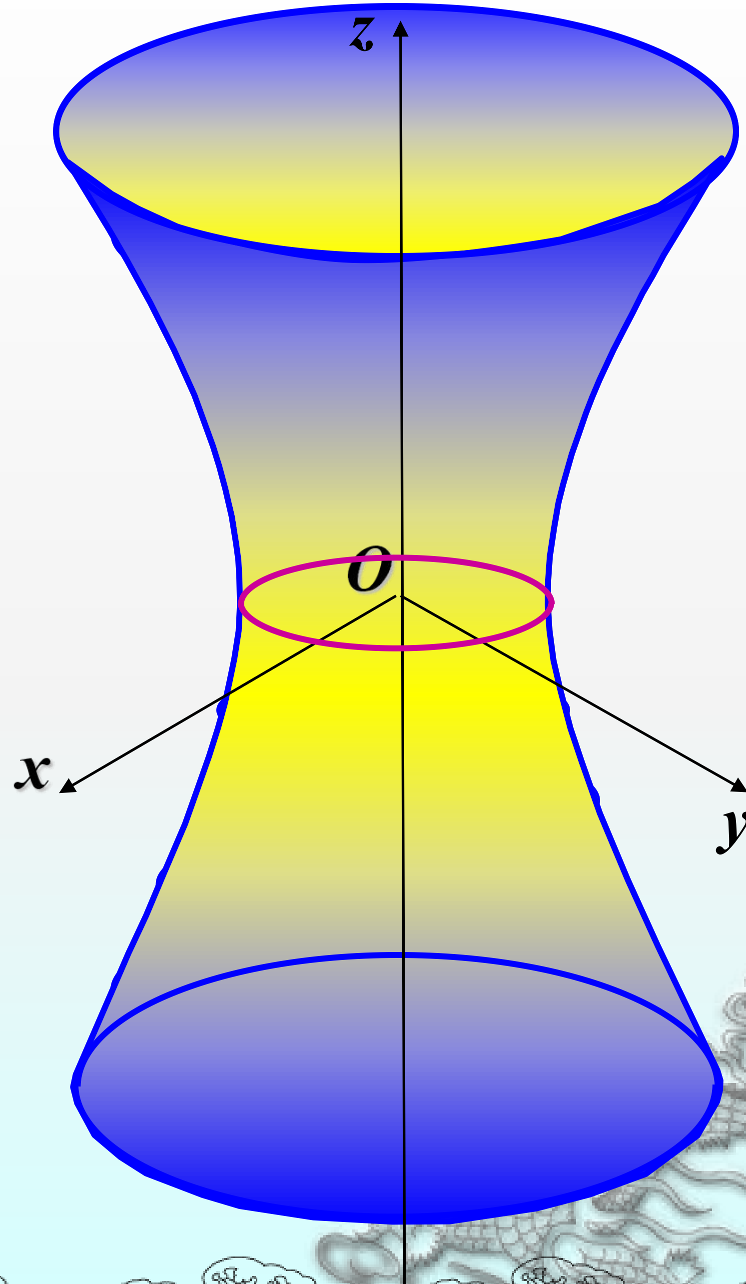
的四个顶点: $(\pm a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}},0,h),(0,,\pm b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}},h)$

分别在 $\left\{\begin{array}{l}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ y=0\end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l}\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ x=0\end{array}\right.$

这两个主双曲线上.


z
o
y
x

结论：单叶双曲面可看作由一个椭圆的变动（大小位置都改变）而产生，该椭圆在变动中，保持所在平面与$x0y$面平行，且两对顶点分别在两主双曲线上滑动。



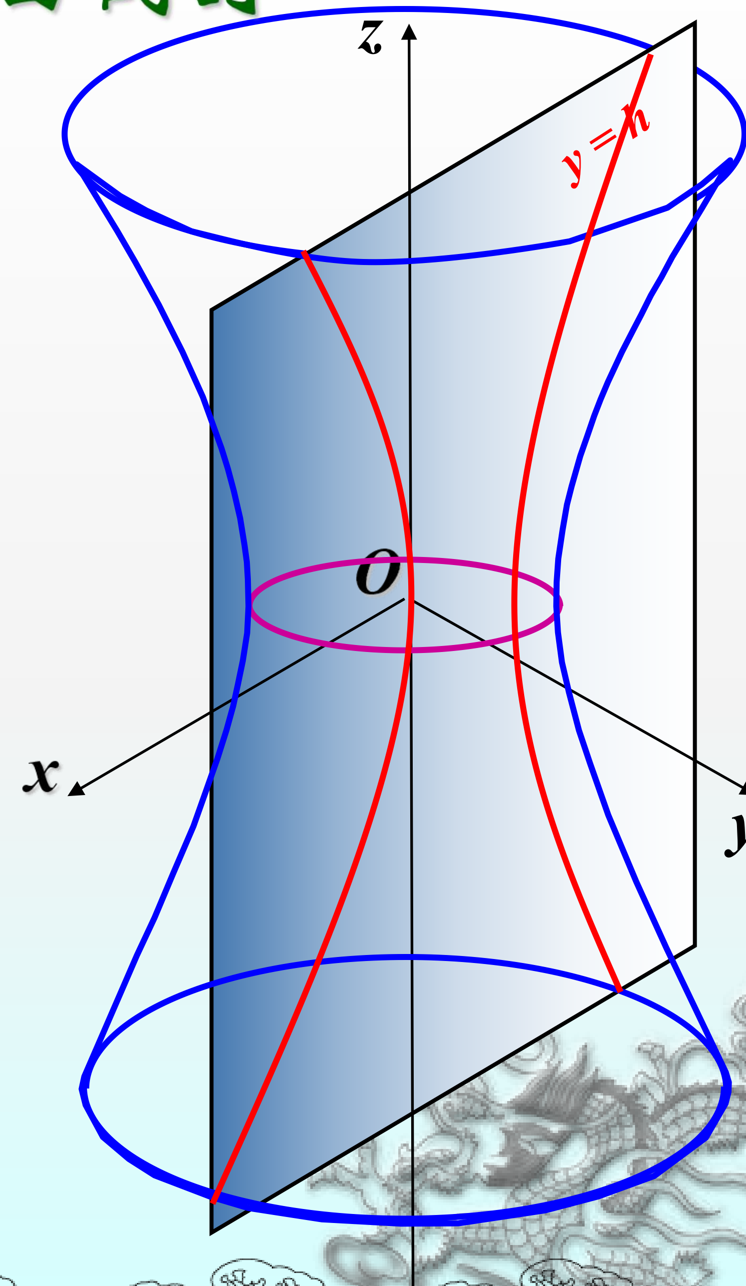
四、用平行于坐标面的平面截割

2. 用 $y=h$ 截曲面

$$C_{y=h}:\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{h^2}{b^2},\\ y=h.\end{cases}$$

①当 $|h|<b$ 时

截线为双曲线

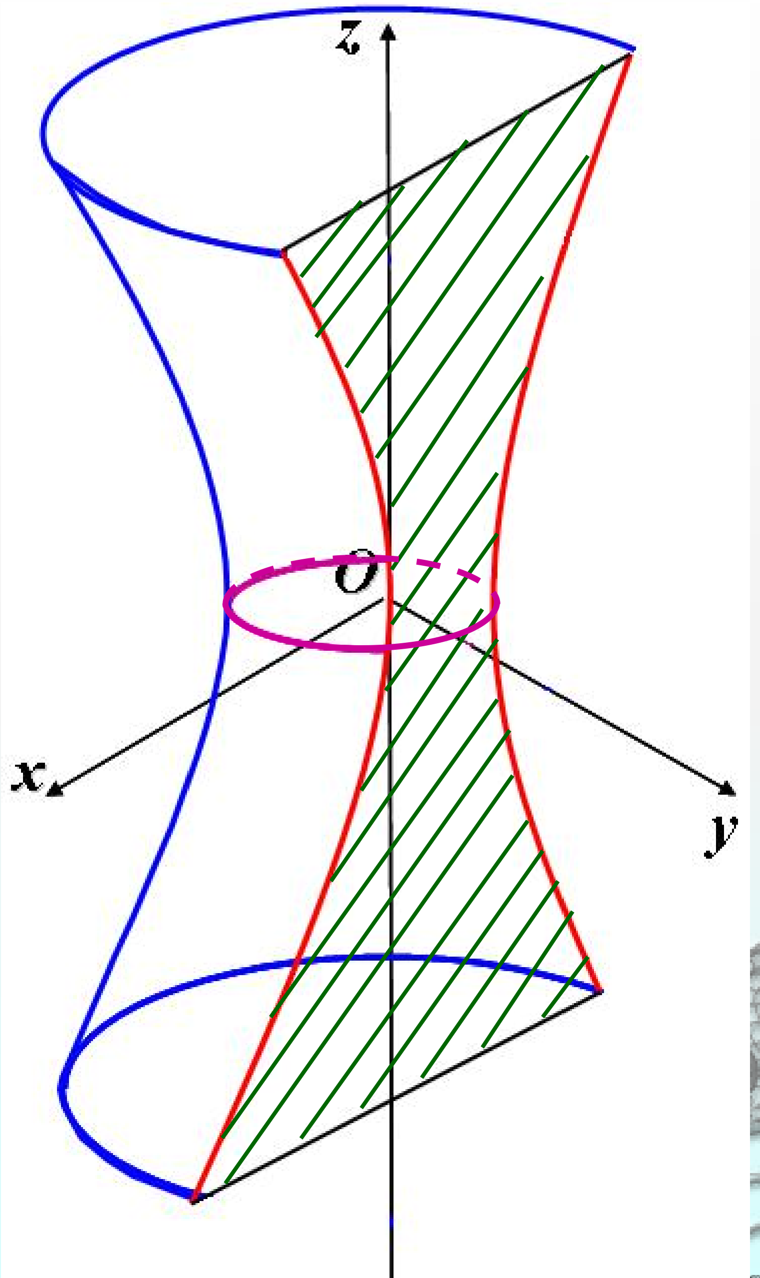


2. 用 $y = h$ 截曲面

$$C_{y=h}: \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 - \dfrac{h^2}{b^2}, \\ y = h. \end{cases}$$

①当 $|h| < b$ 时

截线为双曲线

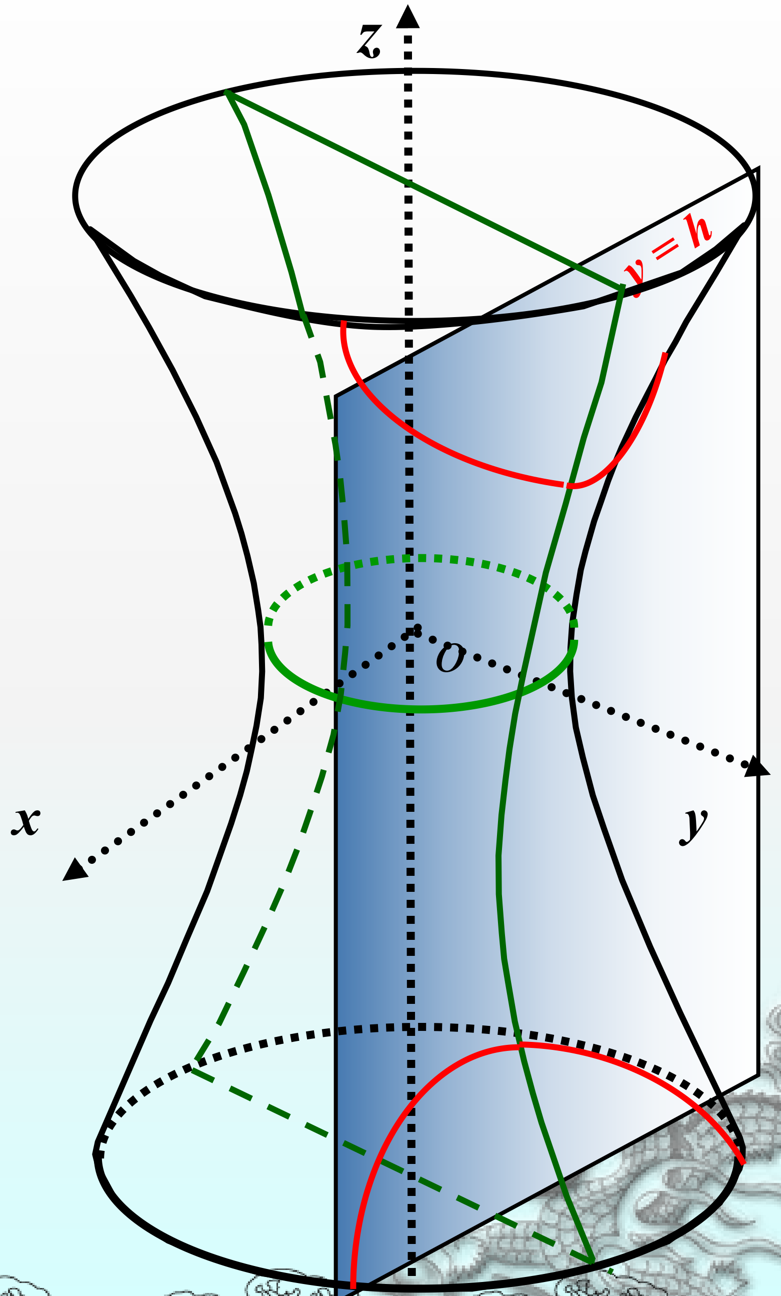


2. 用$y=h$ 截曲面

$$C_{y=h}:\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{h^2}{b^2},\\ y=h.\end{cases}$$

②当$|h|>b$ 时

截线为双曲线

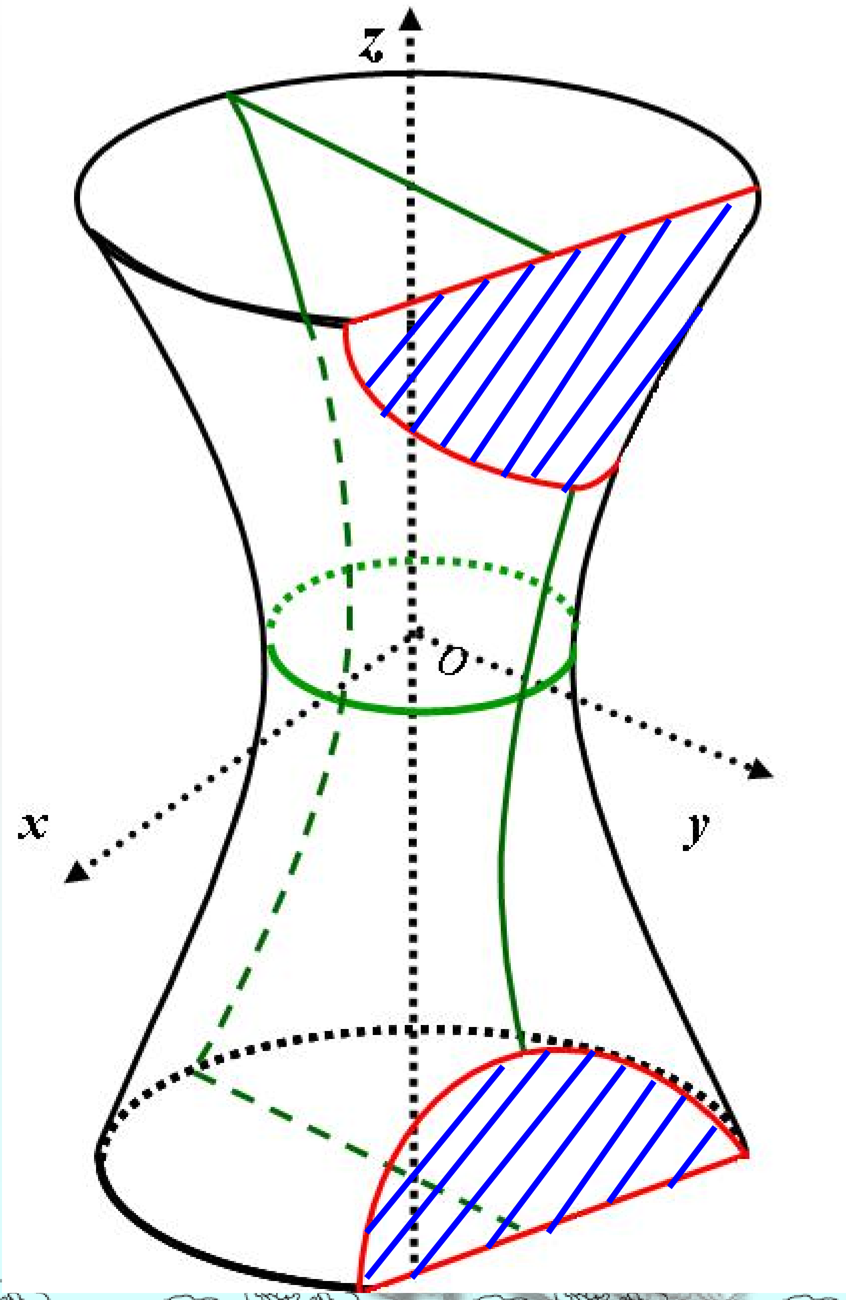


2. 用 $y=h$ 截曲面

$$C_{y=h}:\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{h^2}{b^2},\\ y=h.\end{cases}$$

②当 $|h|>b$ 时

截线为双曲线



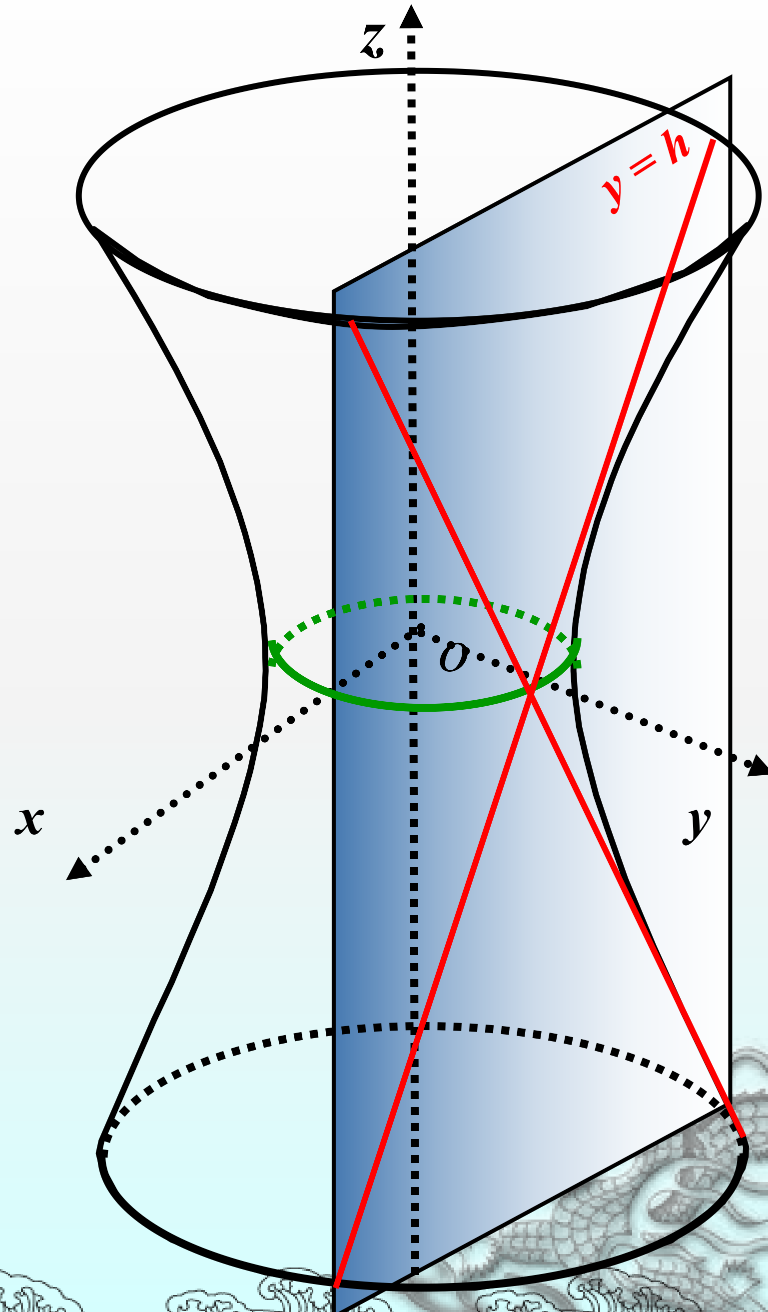
2. 用$y=h$截曲面

$$C_{y=h}:\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{h^2}{b^2},\\ y=h.\end{cases}$$

③当$|h|=b$时

$$C_{y=h}:\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0,\\ y=h.\end{cases}$$

截线为两相交直线



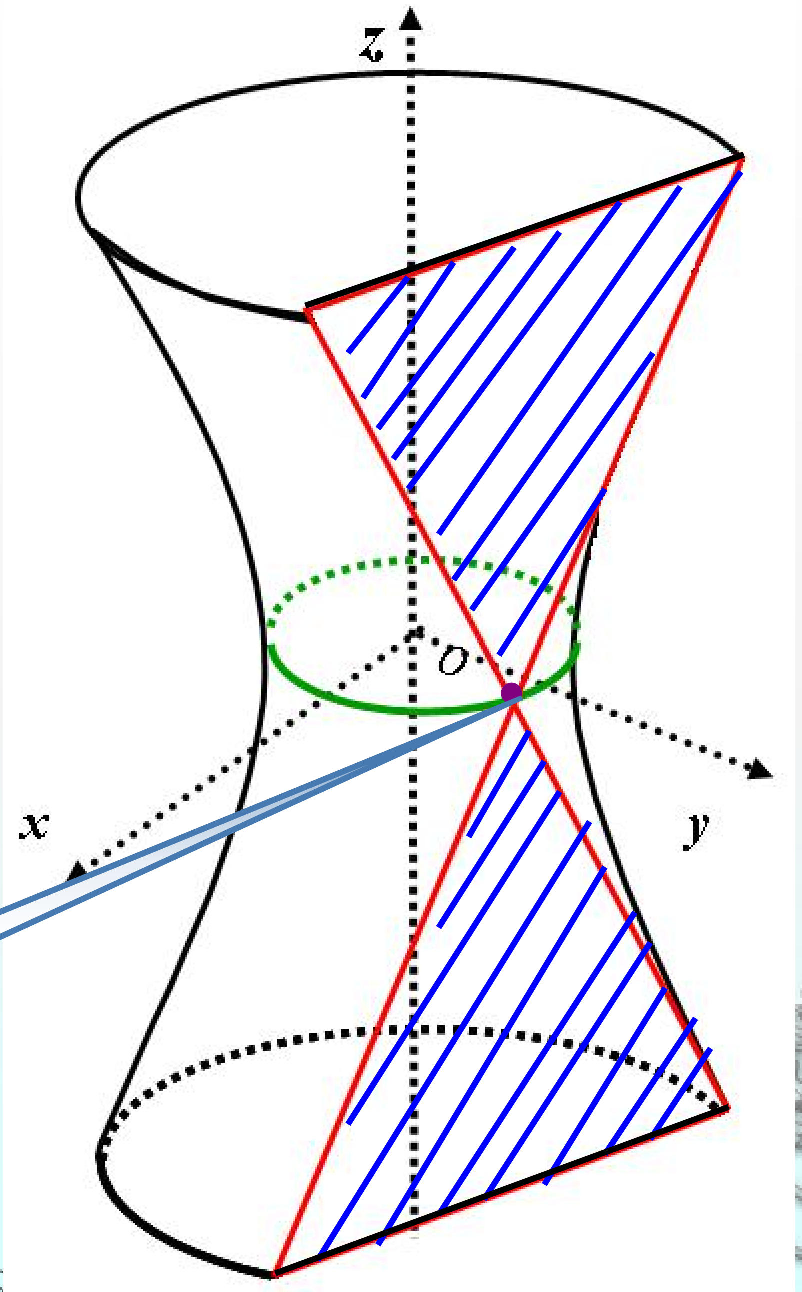
2. 用$y = h$ 截曲面

$$C_{y=h}:\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0,\\ y=h.\end{cases}$$

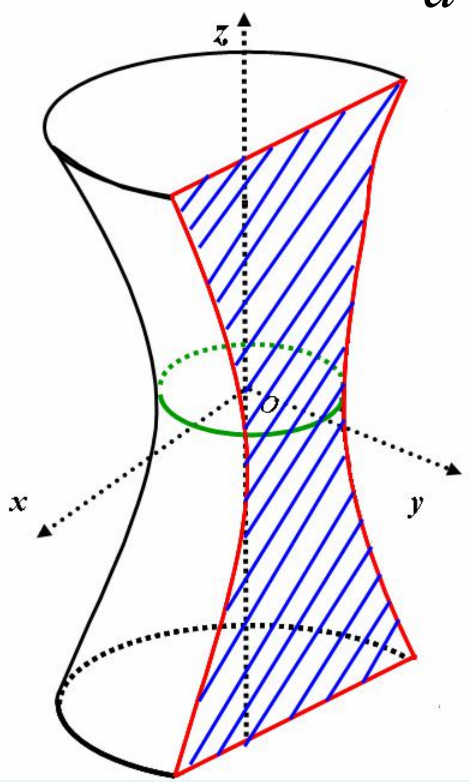
③当$|h| = b$ 时

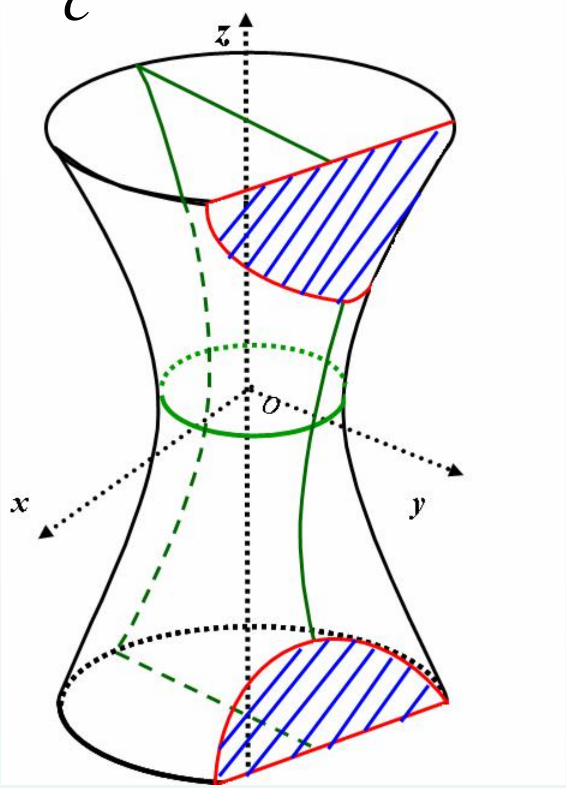
截线为两相交直线

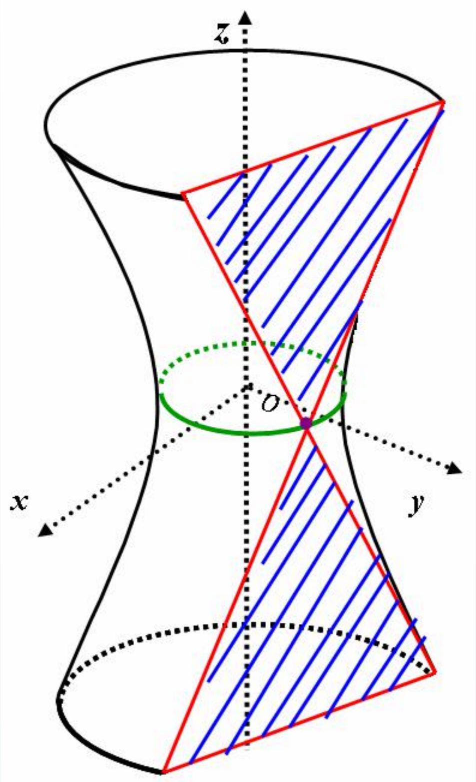
$(0\ ,b\ ,0)$



单叶双曲面：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$　　用$y=h$ 截曲面







①当$|h|<b$ 时

$$C_{y=h}:\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{h^2}{b^2},\\ y=h.\end{cases}$$

②当$|h|>b$ 时

$$C_{y=h}:\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{h^2}{b^2},\\ y=h.\end{cases}$$

③当$|h|=b$ 时

$$C_{y=h}:\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0,\\ y=h.\end{cases}$$

五、课堂小结

1. 用x=t的平面来截割单叶双曲面时，与用于y = h的平面来截割单叶双曲面结果是完全类似的。

2. 用平行截割法对曲面进行截割时，要注意表示平面常数h的取值范围。

思考题：

用一组平行平面 $z=h$（h为任意实数）截割单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1(a>b)$ 得一族椭圆，求这些椭圆焦点的轨迹。

谢 谢 大 家！

不足之处请各位指正！