

《高等代数（1）》课程大纲

一、课程简介

《高等代数(1)》是数学与应用数学专业的专业必修课程,是数学专业研究生入学考试的必考课程之一,也是理论性和应用性很强的一门数学基础课。其主要内容包括一元多项式、行列式、线性方程组、矩阵等。讲授本课程的任务主要在于培养学生的代数基础理论和思想素质,基本掌握代数中的论证方法,获得较熟练的演算技能和初步应用的技巧,为进一步学习其它数学知识打下坚实的基础。

二、教学对象

四年制数学与应用数学专业学生

三、教学目的

通过本课程的教学,使学生对高等代数乃至代数学的思想和方法有较深刻的认识,提高他们的抽象思维、逻辑推理和运算的能力;使学生初步掌握基本的、系统的代数知识和抽象的、严格的代数方法,进而加深对中学代数的理解;使学生能应用代数思想和方法去理解与处理有关的问题,培养与提高代数的理论分析问题与解决问题的能力;为学生今后学习近世代数、离散数学、数值计算、泛函分析等后续课程提供所需的基础理论知识;使学生在智能开发、创新能力培养等方面获得重要的平台。

四、教学要求

在整个教学过程中,加强基本运算能力、抽象思维能力、逻辑推理能力以及解决实际问题的能力的培养。通过本课程的教学,应使学生较系统地掌握高等代数的基础理论和基本方法,提高逻辑思维和推理论证能力,并具备较熟练的计算能力和分析问题的能力,为学习后继课程打下基础。主要以讲授为主、学生参与习题演练为辅等教学方式授课,期末以闭卷考试方式进行考核,总学时 72 学时。

五、教学要求的基础内容及学时要求

学时分配

章节 序号	主要内容	学时 安排	各教学环节学时分配						备注
			讲授	实验	讨论	习题	课外	其它	
一	多项式	24	20		2	2			

章节 序号	主要内容	学时 安排	各教学环节学时分配					备注	
			讲授	实验	讨论	习题	课外		其它
二	行列式	14	10			2		2	
三	线性方程组	14	10		2	2			
四	矩阵	20	14		2	4			
合计		72	54		6	10		2	

各章教学要求和教学内容

第一章 多项式

教学要求

1. 掌握数域的定义, 并会判断一个代数系统是否是数域;
2. 正确理解数域 P 上一元多项式的定义、多项式相乘、次数、一元多项式环等概念。
掌握多项式的运算及运算规律;
3. 正确理解整除的定义, 熟练掌握带余除法及整除的性质;
4. 正确理解和掌握两个(或若干个)多项式的最大公因式, 互素等概念及性质。能用辗转相除法求两个多项式的最大公因式;
5. 正确理解和掌握不可约多项式的定义及性质。深刻理解并掌握因式分解及唯一性定理。掌握多项式的标准分解式;
6. 正确理解和掌握 k 重因式的定义;
7. 掌握多项式函数的概念, 余数定理, 多项式的根及性质。正确理解多项式与多项式函数的关系;
8. 理解代数基本定理。熟练掌握复(实)系数多项式分解定理及标准分解;
9. 深刻理解有理系数多项式的分解与整系数多项式分解的关系。掌握本原多项式的定义、高斯引理、整系数多项式的有理根的性质、Eisenstein 判别法。

教学内容

整除概念、带余除法及整除的性质、最大公因式、互素、辗转相除法、不可约多项式概念、性质、因式分解及唯一性定理、 k 重因式与 k 重根的关系、复(实)系数多项式分解定理、本原多项式、Eisenstein 判别法。

第二章 行列式

教学要求

1. 理解并掌握排列、逆序、逆序数、奇偶排列的定义。掌握排列的奇偶性与对换的关系。
2. 深刻理解和掌握 n 级行列式的定义，能用定义计算一些特殊行列式。
3. 熟练掌握行列式的基本性质，并能利用行列式性质进行计算；
4. 理解元素的余子式、代数余子式等概念。熟练掌握行列式按一行（列）展开的公式。掌握“化三角形法”，“递推降阶法”，“数学归纳法”等计算行列式的技巧；
5. 熟练掌握克莱姆(Cramer)法则；
6. 理解行列式的乘法规则，掌握行列式的一个 k 级子式的余子式概念。

教学内容

n 级行列式的定义、基本性质、矩阵的行列式、矩阵的初等变换、行列式按一行（列）展开的公式、克莱姆(Cramer)法则。

第三章 线性方程组

教学要求

1. 理解和掌握一般线性方程组、方程组的解、增广矩阵、线性方程组的初等变换的概念及性质，掌握阶梯形方程组的特征及作用，会求解线性方程组的一般解；
2. 理解和掌握 n 维向量的定义、运算及两个 n 维向量相等的条件；
3. 理解和掌握线性组合、线性相关、线性无关的定义及性质。掌握两个向量组等价的定义及等价性质定理，理解向量组的极大无关组、秩的定义，并会求解；
4. 深刻理解和掌握矩阵的行秩、列秩、秩的定义。掌握矩阵的秩与其子式的关系。
5. 熟练掌握线性方程组的有解判别定理。理解和掌握线性方程组的公式解；
6. 正确理解和掌握齐次线性方程组的基础解系，解空间的维数与概念。熟练掌握基础解系的求法、线性方程组的结构定理。会求一般线性方程组有解时的全部解。

教学内容

线性方程组的一般解及初等变换、求向量组的一个极大无关组、矩阵的秩、线性方程组的有解判别定理、线性方程组的公式解、齐次线性方程组的基础解系、线性方程组的结构定理、求一般线性方程组有解时的全部解。

第四章 矩阵

教学要求

1. 了解矩阵概念产生的背景；
2. 掌握矩阵的加法、数乘、乘法、转置等运算规律及其计算；
3. 掌握矩阵乘积的行列式定理，矩阵乘积的秩与它的因子的秩的关系；
4. 正确理解和掌握可逆矩阵、逆矩阵、伴随矩阵等概念，掌握一个 n 阶方阵可逆的充要条件和用公式法求一个矩阵的逆矩阵；
5. 理解分块矩阵的意义，掌握分块矩阵的加法、乘法的运算及性质；
6. 正确理解和掌握初等矩阵、初等变换等概念及其它们之间的关系，熟练掌握一个矩阵的等价标准形和矩阵可逆的充要条件；会用初等变换的方法求一个方阵的逆矩阵；
7. 理解分块乘法的初等变换，会求分块矩阵的逆。

教学内容

矩阵的运算、矩阵乘积的行列式定理、矩阵乘积的秩与它的因子的秩的关系、可逆矩阵、逆矩阵、伴随矩阵、 n 阶方阵可逆的充要条件、用公式法求逆矩阵、分块矩阵的意义及运算、初等矩阵、用初等变换的方法求逆矩阵、分块矩阵的逆。

六、课程的其它教学环节

习题课：保证每两周 1 个学时的习题课，根据学生作业情况有针对性的讲解习题。

讨论课：从每章知识点中选择适当的内容，供学生讨论并讲解，重点章节 2 学时。

七、考核方式和考核要求

1. 考核方式：考试
2. 考核要求：

第一章 多项式（约占 25%）

考核内容

数域、一元多项式、整除的概念、最大公因式、因式分解定理、重因式、多项式函数、复系数和实系数多项式的因式分解定理、有理系数多项式。

考核要求

1. 掌握数域上一元多项式的概念、运算以及多项式的和与积的次数；
2. 正确理解多项式的整除概念和性质，理解和掌握带余除法；

3. 掌握最大公因式的概念、性质、求法以及多项式互素的概念和性质；
4. 理解不可约多项式的概念，掌握多项式唯一因式分解定理；
5. 理解多项式的导数及重因式的概念，掌握多项式有无重因式的判别方法；
6. 掌握多项式函数及多项式根的概念；
7. 掌握复数域和实数域上多项式因式分解定理；
8. 熟练地掌握有理系数多项式的有理根的求法。

第二章 行列式（约占 25%）

考核内容

排列、 n 阶行列式及性质、行列式的计算、行列式按一行（列）展开、克莱姆法则。

考核要求

1. 掌握排列的概念与性质；
2. 掌握 n 阶行列式的概念与性质；
3. 会运用行列式的性质，通过降阶和三角化的方法，较熟练地计算行列式；
4. 掌握行列式按一行（列）展开；
5. 掌握克莱姆法则。

第三章 线性方程组（约占 25%）

考核内容

消无法、 n 维向量空间、线性相关性、矩阵的秩、线性方程组有解判别定理线性方程组解的结构。

考核要求

1. 理解消元法与矩阵初等交换的关系，能熟练地运用矩阵的初等变换解一般线性方程；
2. 理解和掌握矩阵的秩的概念，能熟练地用矩阵的初等变换求矩阵的秩；
3. 掌握线性方程组有解的判别定理及其应用；
4. 掌握 n 个未知量 n 个方程的齐次线性方程组有非零解的充要条件；
5. 掌握 n 维向量空间的向量的线性相关性。

第四章 矩阵（约占 25%）

考核内容

矩阵的概念及运算、阵乘积的行列式与秩、矩阵的逆和分块、初等矩阵。

考核要求

1. 掌握矩阵的加法、数乘、乘法、转置及其运算规律，并能熟练地运用；
2. 掌握逆矩阵的概念、矩阵可逆的判定；
3. 熟悉矩阵乘积的行列式及秩的定理；
4. 掌握初等矩阵的概念、初等矩阵与初等变换的关系以及用初等变换求逆矩阵的理论与方法。

八、推荐教材、学习参考资料

1. 推荐教材

北京大学数学系几何与代数教研室代数小组《高等代数》 高等教育出版社 2013 年第四版

2. 学习参考资料

- ①张禾瑞、郝炳新《高等代数》 高等教育出版社 2007 年第五版
- ②杨子胥《高等代数》 高等教育出版社 1988 年第一版
- ③田孝贵《高等代数》 高等教育出版社 1997 年第一版
- ④徐德余《高等代数》 四川大学出版社 2005 年第二版