

5.3 二次曲线的切线



二次曲线与直线的相关位置

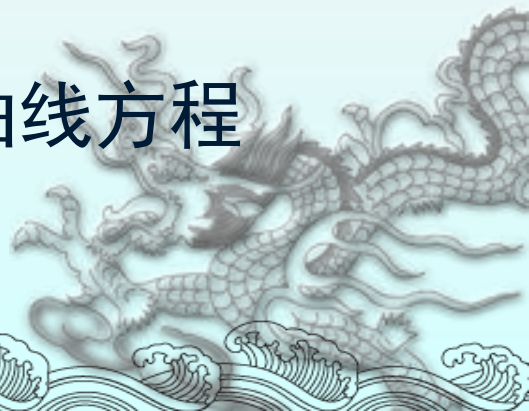
讨论二次曲线

$$F(x, y) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \quad (1)$$

与直线
$$\begin{cases} x = x_0 + Xt \\ y = y_0 + Yt \end{cases} \quad (2)$$

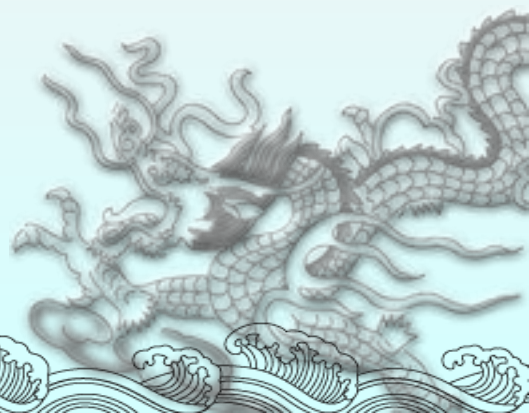
的交点.

可以采用把直线方程 (2) 代入曲线方程 (1), 然后讨论关于t的方程.



$$\Phi(X, Y) \cdot t^2 + 2[F_1(x_0, y_0) \cdot X + F_2(x_0, y_0) \cdot Y]t + F(x_0, y_0) = 0 \quad (4)$$

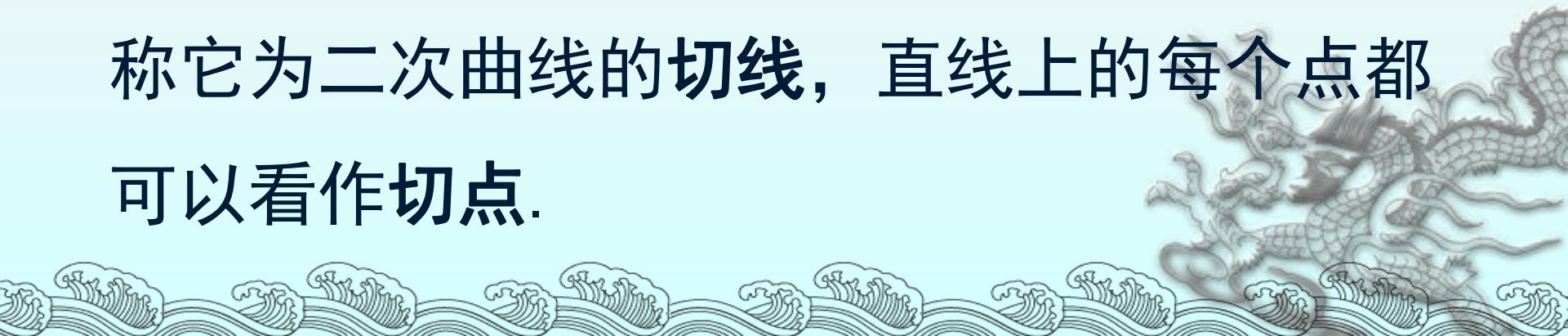
对 (4) 式可分以下几种情况来讨论：



定义5.3.1

1. 如果直线与二次曲线相交于相互重合的两个点，那么这条直线就叫做二次曲线的**切线**，这个重合的交点叫做**切点**.

2. 如果直线全部在二次曲线上，我们也称它为二次曲线的**切线**，直线上的每个点都可以看作**切点**.



$$\Phi(X, Y) \cdot t^2 + 2[F_1(x_0, y_0) \cdot X + F_2(x_0, y_0) \cdot Y]t + F(x_0, y_0) = 0$$

1. $\Phi(X, Y) \neq 0$. 此时(4)是关于t的二次方程,

$$\Delta = 4[F_1(x_0, y_0) \cdot X + F_2(x_0, y_0) \cdot Y]^2 - 4\Phi(X, Y) \cdot F(x_0, y_0)$$

2. $\Delta = 0$. 方程(4)有两个相等的实根 t_1 与 t_2 , 直线(2)与二次曲线(1)有两个相互重合的实交点.



$$2[F_1(x_0, y_0) \cdot X + F_2(x_0, y_0) \cdot Y]t + F(x_0, y_0) = 0$$

2. $\Phi(X, Y) = 0$, 这时又可分三种情况:

$$3^\circ F_1(x_0, y_0) \cdot X + F_2(x_0, y_0) \cdot Y = F(x_0, y_0) = 0.$$

此时 (4) 是恒等式, 直线 (2) 全部在二次曲线 (1) 上.

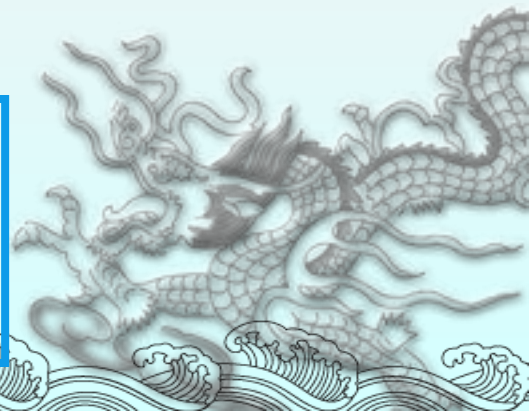


定义5.3.2

二次曲线(1)上满足条件 $F_1(x_0, y_0) = F_2(x_0, y_0) = 0$ 的点 (x_0, y_0) 叫做二次曲线的奇异点, 简称奇点; 二次曲线的非奇异点叫做二次曲线的正常点.

$$\text{正常点} \begin{cases} F_1(x_0, y_0) \neq 0 \text{ 或 } F_2(x_0, y_0) \neq 0 \\ F(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$

$$\text{奇异点} \begin{cases} F_1(x_0, y_0) = 0 \text{ 且 } F_2(x_0, y_0) = 0 \\ F(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$



定理5.3.1

如果 (x_0, y_0) 是二次曲线(1)的**正常点**，那么通过 (x_0, y_0) 的切线方程是

$$(x-x_0)F_1(x_0, y_0) + (y-y_0)F_2(x_0, y_0) = 0,$$

(x_0, y_0) 是它的切点.

如果 (x_0, y_0) 是二次曲线(1)的**奇异点**，那么通过 (x_0, y_0) 的切线不确定，或者说过点 (x_0, y_0) 的每一条直线都是二次曲线(1)的切线.

例1 求二次曲线 $x^2-xy+y^2+2x-4y-3=0$ 在点 $(2, 1)$ 的切线方程.

解：因为 $F(2, 1)=4-2+1+4-4-3=0$,

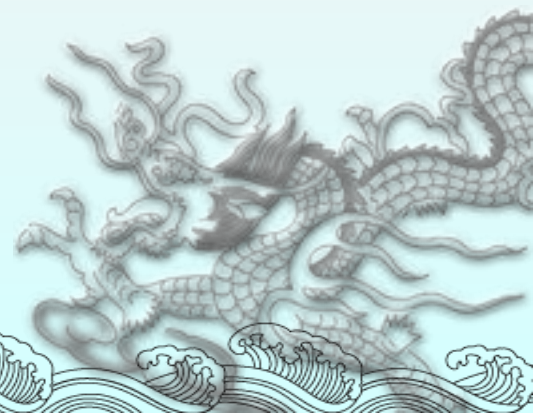
且

$$F_1(2, 1)=5/2 \neq 0, \quad F_2(2, 1)=-2 \neq 0$$

所以 $(2, 1)$ 是二次曲线上的正常点，因此得在点 $(2, 1)$ 的切线方程为：

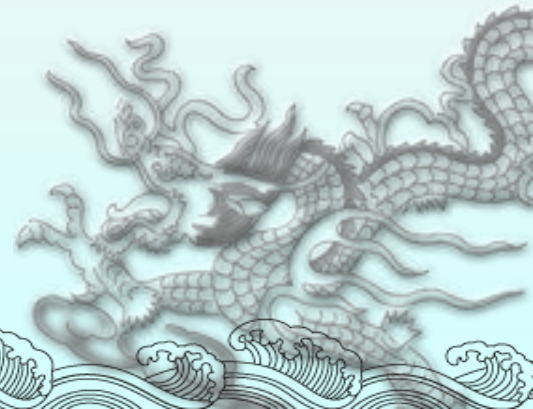
$$5/2 (x-2) - 2(y-1) = 0$$

$$\text{即： } 5x - 4y - 6 = 0$$



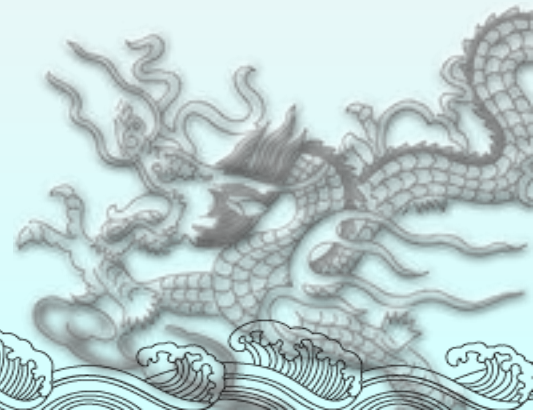
推论 如果 (x_0, y_0) 是二次曲线 (1) 的正常点, 那么通过 (x_0, y_0) 的切线方程是:

$$a_{11}x_0x + a_{12}(x_0y + xy_0) + a_{22}y_0y + a_{13}(x + x_0) + a_{23}(y + y_0) + a_{33} = 0$$



五、课堂小结

1. 当 $\Phi(X, Y) \neq 0$ 时 求解曲线的切线方程;
2. 当 $\Phi(X, Y) = 0$ 时 , 求解曲线的切线方程。



思考题：

$\Phi(X, Y)$ 与二次曲线的主直径、主方向之间的关系？

