5.3二次曲线的切线

二次曲线与直线的相关位置

讨论二次曲线

$$F(x,y) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \qquad (1)$$

与直线

$$\begin{cases} x = x_0 + Xt \\ y = y_0 + Yt \end{cases} \qquad (2)$$

的交点.

可以采用把直线方程（2）代入曲线方程（1），然后讨论关于t的方程.

$$\Phi(X,Y)\cdot t^2 + 2\left[F_1(x_0,y_0)\cdot X + F_2(x_0,y_0)\cdot Y\right]t$$
$$+ F(x_0,y_0) = 0$$

（4）

对（4）式可分以下几种情况来讨论：

定义5.3.1

1. 如果直线与二次曲线相交于相互重合的两个点，那么这条直线就叫做二次曲线的**切线**，这个重合的交点叫做**切点**.

2. 如果直线全部在二次曲线上，我们也称它为二次曲线的**切线**，直线上的每个点都可以看作**切点**.

$$\boxed{\begin{aligned}&\Phi(X,Y)\cdot t^2+2\left[F_1(x_0,y_0)\cdot X+F_2(x_0,y_0)\cdot Y\right]t\\&+F(x_0,y_0)=0\end{aligned}}$$

1. $\Phi(X,Y)\neq 0.$ 此时(4)是关于t的二次方程,

$$\Delta=4\left[F_1(x_0,y_0)\cdot X+F_2(x_0,y_0)\cdot Y\right]^2-4\Phi(X,Y)\cdot F(x_0,y_0)$$

2. $\Delta=0.$ 方程(4)有两个相等的实根 t_1与t_2，直线(2)与二次曲线 (1)有两个相互重合的实交 点.

$$\boxed{2\left[F_1(x_0,y_0)\cdot X+F_2(x_0,y_0)\cdot Y\right]t+F(x_0,y_0)=0}$$

2. $\Phi(X,Y)=0$，这时又可分三种情况：

3° $F_1(x_0,y_0)\cdot X+F_2(x_0,y_0)\cdot Y=F(x_0,y_0)=0.$

此时 (4)是恒等式 ,直线 (2)全部在二次曲线 (1)上.

定义5.3.2

二次曲线(1)上满足条件$F_1(x_0, y_0)=F_2(x_0, y_0)=0$的点$(x_0, y_0)$叫做二次曲线的奇异点，简称奇点；二次曲线的非奇异点叫做二次曲线的正常点.

$$\text{正常点}\begin{cases} F_1(x_0, y_0)\neq 0\text{或}F_2(x_0, y_0)\neq 0 \\ F(x_0, y_0)=0 \end{cases}$$

$$\text{奇异点}\begin{cases} F_1(x_0, y_0)=0\text{且}F_2(x_0, y_0)=0 \\ F(x_0, y_0)=0 \end{cases}$$

定理5.3.1

如果(x_0, y_0)是二次曲线(1)的正常点，那么通过(x_0, y_0)的切线方程是

$$(x-x_0)F_1(x_0, y_0)+(y-y_0)F_2(x_0, y_0)=0,$$

(x_0, y_0)是它的切点.

如果(x_0, y_0)是二次曲线(1)的奇异点，那么通过(x_0, y_0)的切线不确定，或者说过点(x_0, y_0)的每一条直线都是二次曲线(1)的切线.

例1 求二次曲线$x^2-xy+y^2+2x-4y-3=0$在点(2, 1)的切线方程.

解：因为$F(2,1)=4-2+1+4-4-3=0$,

且

$F_1(2,1)=5/2\neq 0$, $F_2(2,1)=-2\neq 0$

所以(2, 1)是二次曲线上的正常点，因此得在点(2, 1)的切线方程为：

$$5/2(x-2)-2(y-1)=0$$

即：$5x-4y-6=0$

推论 如果(x_0, y_0)是二次曲线(1)的正常点，那么通过(x_0, y_0)的切线方程是：

$$a_{11}x_0x+a_{12}(x_0y+xy_0)+a_{22}y_0y+a_{13}(x+x_0)+a_{23}(y+y_0)+a_{33}=0$$

五、课堂小结

1. 当$\Phi(X,Y)\neq 0$时，求解曲线的切线方程;

2. 当$\Phi(X,Y)=0$时，求解曲线的切线方程。

思考题：

$\Phi(X,Y)$与二次曲线的主直径、主方向之间的关系？