

(k_1, k_2, \dots, k_n) , 当 x_1, x_2, \dots, x_n 分别用 k_1, k_2, \dots, k_n 代入后, (1) 中每个等式都变成恒等式. 方程组 (1) 的解的全体称为它的解集合. 解方程组实际上就是找出它全部的解, 或者说, 求出它的解集合.

3. 方程组的同解

如果两个方程组有相同的解集合, 它们就称为同解的.

4. 方程组的系数矩阵和增广矩阵

如果知道了一个线性方程组的全部系数和常数项, 那么这个线性方程组就基本上确定了. 确切地说, 线性方程组 (1) 可以用下面的矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} & b_s \end{pmatrix} \quad (2)$$

来表示. 矩阵 (2) 被称为线性方程组 (1) 的增广矩阵. 实际上, 有了 (2) 之后, 除去代表未知量的文字外线性方程组 (1) 就确定了, 而采用什么文字来代表未知量当然不是实质性的.

(二) 消元法

1. 引例 下面就来介绍如何用一般消元法解一般线性方程组.

引例 解方程组

$$\begin{cases} 2x + 4y = 4 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

交换第一个方程组与第二个方程, 就变成

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 4y = 4 \end{cases}$$

(这一步的意图是: 将第二个方程中消去未知量 x 更方便)

第一个方程的 -2 倍加到第二个方程, 即得 $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2y = -2 \end{cases}$

(这一步的意图是:将第二个方程中消去未知量 x).

第二个方程两边同时乘 0.5 得
$$\begin{cases} x + y = 3 \\ y = -1 \end{cases}$$

然后一步步往上代替即使用代入消元法解出剩余的未知量

这样,就容易求出方程组的解为 $(4, -1)$.

分析一下消元法,不难看出,它实际上是反复地对方程组进行变换,而所用的变换也只是由以下三种基本的变换所构成:

1. 用一非零数乘某一方程;
2. 把一个方程的倍数加到另一个方程;
3. 互换两个方程的位置.

2. 线性方程组的初等变换

定义 1 变换 1, 2, 3 称为线性方程组的初等变换.

3. 利用初等变换解一般的线性方程组

消元的过程就是反复施行初等变换的过程. 下证: 初等变换总是把方程组变成同解的方程组.

下面首先说明, 如何利用初等变换来解一般的线性方程组.

对于方程组(1), 首先检查 x_1 的系数. 如果 x_1 的系数 $a_{11}, a_{21}, \dots, a_{s1}$ 全为零, 那么方程组(1)对 x_1 没有任何限制, x_1 就可以取任何值, 而方程组(1)可以看作 x_2, \dots, x_n 的方程组来解. 如果 x_1 的系数不全为零, 那么利用初等变换 3, 可以设 $a_{11} \neq 0$. 利用初等变换 2, 分别把第一个方程的 $-\frac{a_{i1}}{a_{11}}$ 倍加到第 i 个方程 ($i = 2, \dots, n$). 于是方程组(1)就变成

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \dots\dots\dots \\ a'_{s2}x_2 + \cdots + a'_{sn}x_n = b'_s, \end{cases} \quad (4)$$

其中

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} \cdot a_{1j}, \quad i = 2, \dots, s, \quad j = 2, \dots, n$$

这样, 解方程组(1)的问题就归结为解方程组

$$\begin{cases} a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \dots\dots\dots \\ a'_{s2}x_2 + \cdots + a'_{sn}x_n = b'_s \end{cases} \quad (5)$$

的问题. 显然(5)的一个解, 代入(4)的第一个方程就定出 x_1 的值, 这就得出(4)的一个解; (4)的解显然都是(5)的解. 这就是说, 方程组(4)有解的充要条件为方程组(5)有解, 而(4)与(1)是同解的, 因之, 方程组(1)有解的充要条件为方程组(5)有解.

对(5)再按上面的考虑进行变换, 并且这样一步步作下去, 最后就得到一个阶梯形方程组. 为了讨论起来方便, 不妨设所得的方程组为

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1r}x_r + \cdots + c_{1n}x_n = d_1, \\ c_{22}x_2 + \cdots + c_{2r}x_r + \cdots + c_{2n}x_n = d_2, \\ \dots\dots\dots \\ c_{rr}x_r + \cdots + c_{rn}x_n = d_r, \\ 0 = d_{r+1}, \\ 0 = 0, \\ \dots\dots \\ 0 = 0. \end{cases} \quad (6)$$

其中 $c_{ii} \neq 0, i = 1, 2, \dots, r$. 方程组(6)中的“ $0=0$ ”这样一些恒等式可能不出现, 也可能出现, 这时去掉它们也不影响(6)的解. 而且(1)与(5)是同解的.

现在考虑(6)的解的情况.

如(6)中有方程 $0 = d_{r+1}$, 而 $d_{r+1} \neq 0$. 这时不管 x_1, x_2, \dots, x_n 取什么值都不能使

它成为等式. 故(6)无解, 因而(1)无解.

当 d_{r+1} 是零或(6)中根本没有“ $0=0$ ”的方程时, 分两种情况:

1) $r = n$. 这时阶梯形方程组为

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n = d_1, \\ c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n = d_2, \\ \dots\dots\dots \\ c_{nn}x_n = d_n, \end{cases} \quad (7)$$

其中 $c_{ii} \neq 0, i = 1, 2, \dots, n$. 由最后一个方程开始, x_n, x_{n-1}, \dots, x_1 的值就可以逐个地唯一决定了. 在这个情形, 方程组(7), 也就是方程组(1)有唯一的解.

例 1 解方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1, \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$$

2) $r < n$. 这时阶梯形方程组为

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1r}x_r + c_{1,r+1}x_{r+1} + \cdots + c_{1n}x_n = d_1, \\ c_{22}x_2 + \cdots + c_{2r}x_r + c_{2,r+1}x_{r+1} + \cdots + c_{2n}x_n = d_2, \\ \dots\dots\dots \\ c_{rr}x_r + c_{r,r+1}x_{r+1} + \cdots + c_{rn}x_n = d_r, \end{cases}$$

其中 $c_{ii} \neq 0, i = 1, 2, \dots, r$. 把它改写成

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1r}x_r = d_1 - c_{1,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{1n}x_n, \\ c_{22}x_2 + \cdots + c_{2r}x_r = d_2 - c_{2,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{2n}x_n, \\ \dots\dots\dots \\ c_{rr}x_r = d_r - c_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{rn}x_n. \end{cases} \quad (8)$$

由此可见, 任给 x_{r+1}, \dots, x_n 一组值, 就唯一地定出 x_1, x_2, \dots, x_r 的值, 也就是定出方程组(8)的一个解. 一般地, 由(8)我们可以把 x_1, x_2, \dots, x_r 通过 x_{r+1}, \dots, x_n 表示出来, 这样一组表达式称为方程组(1)的**一般解**, 而 x_{r+1}, \dots, x_n 称为一组**自由未知量**.

解还是无解，在有解的情形，回到阶梯形方程组去解.

例 3 解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

例 4 解线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}$$

解：对该方程组的增广矩阵施行如下的初等变换：

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 3r_1, r_4 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{r_2 \times (-\frac{1}{5})} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - 2r_2, r_4 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_4 - 2r_3, r_3 \times (-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

这就相当于原方程组同解于
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ x_2 - x_3 = 1 \\ x_3 = 2 \end{cases} \quad (r=3=n, \text{ 有唯一解})$$

$x_2 = 1 + x_3 = 1 + 2 = 3, x_1 = 3 - 2x_2 + x_3 = 3 - 6 + 2 = -1$ 即原方程组的解为
$$\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

五、小结

1. 会用消元法解线性方程组了吗？
2. 用矩阵的语言叙述线性方程组什么情况下无解，什么情况有解？有解的时，哪种情况有唯一解，哪种情况有无穷多个解，无穷多个解是如何表示该方程组的一般解？

六、作业（见习题册）

七、教学反思

教学的时间: 2020年 月 日

教学学时数: 2 学时

3.2 n 维向量空间

一、教学目标

1. 理解 n 维向量的概念及其相关运算.
2. 了解 n 维向量的空间定义.

二、教学重点

向量的运算

三、教学难点

向量的运算

四、教学过程

1. 向量的概念

定义 2 所谓数域 P 上一个 n 维向量就是由数域 P 中 n 个数组成的有序数组

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \quad (1)$$

a_i 称为向量 (1) 的分量.

用小写希腊字母 $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ 来代表向量.

定义 3 如果 n 维向量

$$\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n), \beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)$$

的对应分量都相等, 即

$$a_i = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

就称这两个向量是相等的, 记作 $\alpha = \beta$.

n 维向量之间的基本关系是用向量的加法和数量乘法表达的.

2. 向量的运算及其规律

定义 4 向量 $\gamma = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$ 称为向量

$\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ 的和, 记为 $\gamma = \alpha + \beta$

由定义立即推出:

$$\text{交换律: } \alpha + \beta = \beta + \alpha. \quad (2)$$

$$\text{结合律: } \alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma. \quad (3)$$

定义 5 分量全为零的向量

$$(0, 0, \dots, 0)$$

称为零向量, 记为 0 ; 向量 $(-a_1, -a_2, \dots, -a_n)$ 称为向量 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ 的负向量, 记为 $-\alpha$.

显然对于所有的 α , 都有

$$\alpha + 0 = \alpha. \quad (4)$$

$$\alpha + (-\alpha) = 0. \quad (5)$$

(2) — (5) 是向量加法的四条基本运算规律.

定义 6 $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$

定义 7 设 k 为数域 P 中的数, 向量

$$(ka_1, ka_2, \dots, ka_n)$$

称为向量 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ 与数 k 的数量乘积, 记为 $k\alpha$

由定义立即推出:

$$k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta, \quad (6)$$

$$(k+l)\alpha = k\alpha + l\alpha, \quad (7)$$

$$k(l\alpha) = (kl)\alpha, \quad (8)$$

$$1\alpha = \alpha. \quad (9)$$

(6) — (9) 是关于数量乘法的四条基本运算规则. 由 (6) — (9) 或由定义不难推

出:

$$0\alpha = 0, \quad (10)$$

$$(-1)\alpha = -\alpha, \quad (11)$$

$$k0 = 0. \quad (12)$$

如果 $k \neq 0, \alpha \neq 0$, 那么

$$k\alpha \neq 0. \quad (13)$$

3. 向量空间的概念

定义 8 以数域 P 中的数作为分量的 n 维向量的全体, 同时考虑到定义在它们上面的加法和数量乘法, 称为数域 P 上的 n 维向量空间.

在 $n=3$ 时, 3 维实向量空间可以认为就是几何空间中全体向量所成的空间.

以上已把数域 P 上全体 n 维向量的集合组成一个有加法和数量乘法的代数结构, 即数域 P 上 n 维向量空间.

向量通常是写成一行:

$$\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n).$$

有时也可以写成一列:

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

为了区别, 前者称为行向量, 后者称为列向量。它们的区别只是写法上的不同.

五、小结

1. 如何判断两个 n 维向量的是否相等?

2. 向量的加法是如何定义的?
3. 向量的数乘向量是如何定义的?
4. 向量的加法和数乘满足哪些运算规律?

六、作业 (习题册)

七、教学反思

教学的时间: 2020年 月 日

教学学时数: 4 学时

3.3 线性相关

一、教学目标

1. 掌握线性组合、线性相关、线性无关的定义及性质.
2. 掌握两个向量组等价的定义及等价性质定理.
3. 理解向量组的极大无关组、秩的定义, 并会求向量组的极大线性无关组.

二、教学重点

1. 线性组合、线性相关、线性无关的定义及性质.
2. 向量组的极大无关组、秩的定义, 并会求向量组的极大线性无关组.

三、教学难点

向量组的极大无关组、秩的定义, 并会求向量组的极大线性无关组.

四、教学过程

一般向量空间除只有一个零向量构成的零空间外, 都含有无穷多个向量, 这些向量之间有怎样的关系, 对于弄清向量空间的结构至关重要.

(一)、线性相关与线性无关

两个向量之间最简单的关系是成比例. 所谓向量 α 与 β 成比例就是说有一数 k 使 $\alpha = k\beta$.

定义 9 向量 α 称为向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 的一个线性组合, 如果有数域 P 中的数 k_1, k_2, \dots, k_s , 使 $\alpha = k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \dots + k_s\beta_s$, 其中 k_1, k_2, \dots, k_s 叫做这个线性组合的系数.

例如, 任一个 n 维向量 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ 都是向量组

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = (1, 0, \dots, 0), \\ \varepsilon_2 = (0, 1, \dots, 0), \\ \dots\dots\dots \\ \varepsilon_n = (0, 0, \dots, 1) \end{cases} \quad (1)$$

的一个线性组合.

向量 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 称为 n 维单位向量. 零向量是任意向量组的线性组合.

当向量 α 是向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 的一个线性组合时, 也说 α 可以经向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性表出.

定义 10 如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$ 中每一个向量 $\alpha_i (i=1, 2, \dots, t)$ 都可以经向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性表出, 那么向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$ 就称为可以经向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性表出. 如果两个向量组互相可以线性表出, 它们就称为**等价**.

由定义有, 每一个向量组都可以经它自身线性表出. 同时, 如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$ 可以经向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性表出, 向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 可以经向量组 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p$ 线性表出, 那么向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$ 可以经向量组 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p$ 线性表出.

向量组之间等价具有以下性质:

- 1) **反身性**: 每一个向量组都与它自身等价.
- 2) **对称性**: 如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 与 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 等价, 那么向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 与 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 等价.
- 3) **传递性**: 如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 与 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 等价, $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 与 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p$ 等价, 那么向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 与 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p$ 等价.

例 1 判断向量 α 能否由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出, 若能, 写出它的一个线性组合.

$$\alpha = (2, -1, 3, 4), \quad \alpha_1 = (1, 2, -3, 1), \quad \alpha_2 = (5, -5, 12, 11), \quad \alpha_3 = (1, -3, 6, 3)$$

解: 设 $\alpha = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3$, 即有方程组:

$$\begin{cases} k_1 + 5k_2 + k_3 = 2 \\ 2k_1 - 5k_2 - 3k_3 = -1 \\ -3k_1 + 12k_2 - 6k_3 = 3 \\ k_1 + 11k_2 + 3k_3 = 4 \end{cases} \quad (1)$$

对方程组 (1) 的增广矩阵作初等行变换化为最简行阶梯阵

$$\bar{A} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & -5 & -3 & -1 \\ -3 & 12 & 6 & 3 \\ 1 & 11 & 3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & -15 & -5 & -5 \\ 0 & 27 & 9 & 9 \\ 0 & 6 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以方程组(1)有解.

$$(1) \text{ 的一般解为: } \begin{cases} k_1 = \frac{2}{3}k_3 + \frac{1}{3} \\ k_2 = -\frac{1}{3}k_3 + \frac{1}{3} \end{cases}, \quad k_3 \text{ 为自由求知量.}$$

令 $k_3=1$, 得(1)的一个特解 $(1, 0, 1)$, 从而有 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_3$.

例 2 向量组 $\alpha_1 = (1,0)$, $\alpha_2 = (0,1)$ 与向量组 $\beta_1 = (1,1)$, $\beta_2 = (1,3)$ 等价.

解: 设 $\alpha_1 = (1,0) = k_1\beta_1 + k_2\beta_2 = (k_1, k_1) + (k_2, 3k_2) = (k_1 + k_2, k_1 + 3k_2)$

$$\Rightarrow \begin{cases} k_1 + k_2 = 1 \\ k_1 + 3k_2 = 0 \end{cases}, \quad \Rightarrow \begin{cases} k_1 = \frac{3}{2} \\ k_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}, \quad \text{故} \quad \alpha_1 = \frac{3}{2}\beta_1 - \frac{1}{2}\beta_2.$$

设 $\alpha_2 = (0,1) = k_1\beta_1 + k_2\beta_2$,

$$\Rightarrow \begin{cases} k_1 + k_2 = 0 \\ k_1 + 3k_2 = 1 \end{cases}, \quad \Rightarrow \begin{cases} k_1 = -\frac{1}{2} \\ k_2 = \frac{1}{2} \end{cases}, \quad \text{故} \quad \alpha_2 = -\frac{1}{2}\beta_1 + \frac{1}{2}\beta_2.$$

又 $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2$, $\beta_2 = \alpha_1 + 3\alpha_2$, 故这两个向量组等价.

定义 11 如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ ($s \geq 2$) 中有一个向量是可以由其余的向量的线性表出, 那么向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关.

从定义可以看出, 任意一个包含零向量的向量组一定是线性相关的. 向量组 α_1, α_2 线性相关就表示 $\alpha_1 = k\alpha_2$ 或者 $\alpha_2 = k\alpha_1$ (这两个式子不一定能同时成立). 在 P 为实数域, 并且是三维时, 就表示向量 α_1 与 α_2 共线. 三个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关的几何意义就是它们共面.

定义 11' 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ ($s \geq 1$) 称为线性相关的, 如果有数域 P 中不全为零的数 k_1, k_2, \dots, k_s , 使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0$$

这两个定义在 $s \geq 2$ 的时候是一致的.

定义 12 一向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ ($s \geq 1$) 非线性相关, 即没有不全为零的数 k_1, k_2, \dots, k_s , 使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0$$

就称为线性无关; 或者说, 一向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 称为线性无关, 如果由

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0$$

可以推出

$$k_1 = k_2 = \dots = k_s = 0$$

由定义有, 如果一向量组的一部分线性相关, 那么这个向量组就线性相关. 换句话说, 如果一向量组线性无关, 那么它的任何一个非空的部分组也线性无关. 特别地, 由于两个成比例的向量是线性相关的, 所以, 线性无关的向量组中一定不能包含两个成比例的向量.

定义 11' 包含了由一个向量组构成的向量组的情形. 单独一个零向量线性相关, 单独一个非零向量线性无关.

不难看出, 由 n 维单位向量 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 组成的向量组是线性无关的.

具体判断一个向量组是线性相关还是线性无关的问题可以归结为解方程组的问题. 要判断一个向量组

$$\alpha_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \quad i = 1, 2, \dots, s \quad (2)$$

是否线性相关, 根据定义 11, 就是看方程

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_s\alpha_s = 0 \quad (3)$$

有无非零解. (3) 式按分量写出来就是

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{s1}x_s = 0, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{s2}x_s = 0, \\ \dots\dots\dots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + a_{sn}x_s = 0. \end{cases} \quad (4)$$

定义 13 一向量组的一个部分组称为一个极大线性无关组, 如果这个部分组本身是线性无关的, 并且从这个向量组中任意添一个向量(如果还有的话), 所得的部分向量组都线性相关.

一个线性无关向量组的极大线性无关组就是这个向量组本身.

极大线性无关组的一个基本性质是, 任意一个极大线性无关组都与向量组本身等价.

例 6 看 P^3 的向量组

$$\alpha_1 = (1,0,0), \alpha_2 = (0,1,0), \alpha_3 = (1,1,0)$$

在这里 $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ 线性无关, 而 $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$, 所以 $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ 是一个极大线性无关组. 另一方面, $\{\alpha_1, \alpha_3\}$, $\{\alpha_2, \alpha_3\}$ 也都是向量组 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 的极大线性无关组.

由上面的例子可以看出, 向量组的极大线性无关组不是唯一的. 但是每一个极大线性无关组都与向量组本身等价, 因而, 一向量组的任意两个极大线性无关组都是等价的.

定理 3 一向量组的极大线性无关组都含有相同个数的向量.

定理 3 表明, 极大线性无关组所含向量的个数与极大线性无关组的选择无关, 它直接反映了向量组本身的性质. 因此有

定义 14 向量组的极大线性无关组所含向量的个数称为这个向量组的秩.

一向量组线性无关的充要条件是它的秩与它所含向量的个数相同.

每一向量组都与它的极大线性无关组等价. 由等价的传递性可知, 任意两个等价向量组的极大线性无关组也等价. 所以, 等价的向量组必有相同的秩.

若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 可经向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性表出, 则

例7 (1) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 证明 $\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ 也线性无关; 对 n 个线性无关向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, 以上命题是否成立?

(2) 当 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 证明 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$ 也线性无关, 当 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关时, $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \dots, \alpha_{n-1} + \alpha_n, \alpha_n + \alpha_1$ 是否也线性无关?

例8 设在向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 中, $\alpha_1 \neq 0$ 且每个 α_i 都不能表成它的前 $i-1$ 个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}$ 的线性组合, 证明 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关.

五、小结

1. 请叙述线性相关和线性无关的定义, 及其判断向量组线性相关性的方法.
2. 请叙述极大线性无关组及其在解线性方程组中的作用.

六、作业 (习题册)

七、教学反思

教学的时间: 2020 年 月 日

教学学时数: 2 学时

3.4 矩阵的秩

一、教学目标

1. 掌握矩阵的行秩、列秩、秩的定义.
2. 掌握矩阵的秩与其子式的关系.
3. 理解齐次线性方程组有非零解的充要条件.

二、教学重点

1. 矩阵的秩的定义.

三、教学难点

1. 矩阵的秩与其子式的关系.

四、教学过程

(一) 矩阵的秩

定义 15 所谓矩阵的行秩就是指矩阵的行向量组的秩; 矩阵的列秩就是矩阵的列向量组的秩.

例 1 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 记 A 的行向量, $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 记 A 的列

向量. 求 A 的行秩和列秩.

$$\text{解: } A \xrightarrow{\beta_2 - \beta_1, \beta_3 - 3\beta_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \xrightarrow{\beta_3 - 3\beta_1 + \frac{1}{2}(\beta_2 - \beta_1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\because \tilde{\alpha}_1 = (1, 1, 1), \tilde{\alpha}_2 = (0, 2, 4), \tilde{\alpha}_3 = (0, 0, 5)$ 做成的三阶子式不为 0, 从而 $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \tilde{\alpha}_3$ 线性无关, 于是它的反向延长向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 也线性无关. 因 $\alpha_4 = 0$, 故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关. A 的行向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的极大无关组为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

($|A| \neq 0 \Leftrightarrow R(A) = n$, A 也称为满秩矩阵.)

证明: “ \Leftarrow ”: 设 $R(A) < n$, 则 A 的行向量线性无关,

当 $n=1$ 时, 因一个向量 α 线性相关 $\Leftrightarrow \alpha = 0$, 故 $|A| = |0| = 0$.

当 $n > 1$, A 至少有一行向量可由其余行向量线性表示, 不妨设

$$\alpha_n = k_1\alpha_1 + \cdots + k_{n-1}\alpha_{n-1},$$

作行初等变换: $r_n - k_1r_1 + \cdots + k_{n-1}r_{n-1} = 0$, 则

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = 0$$

“ \Rightarrow ”: 对 n 作数学归纳法, $n=1$ 时, 因 $|A|=0$, 知 A 仅有一个元素为 0, 故 $R(A)=0 < 1$.

假设对 $n-1$ 结论成立, 来看 n 的情形, 若 A 的第 1 列元素全为 0, 则 $R(A) < n$.

如果 A 的第 1 列元素不全为 0, 至少有一元素非零, 不妨设 $a_{11} \neq 0$, 作行初等变换,

$$r_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}}r_1, \quad \cdots, \quad r_n - \frac{a_{n1}}{a_{11}}r_1,$$

$$\text{则 } |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} - \frac{a_{21}a_{12}}{a_{11}} & \cdots & a_{2n} - \frac{a_{21}a_{1n}}{a_{11}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n2} - \frac{a_{n1}a_{12}}{a_{11}} & \cdots & a_{nn} - \frac{a_{n1}a_{1n}}{a_{11}} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a'_{n2} & \cdots & a'_{nn} \end{vmatrix},$$

其中: $(0, a'_{22}, \cdots, a'_{2n}) = \alpha_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}}\alpha_1, \quad \cdots, \quad (0, a'_{n2}, \cdots, a'_{nn}) = \alpha_n - \frac{a_{n1}}{a_{11}}\alpha_1.$

因 $|A| = 0, \Rightarrow |\tilde{A}| = \begin{vmatrix} a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a'_{n2} & \cdots & a'_{nn} \end{vmatrix} = 0$, 由归纳假设 $R(\tilde{A}) < n-1$, 故 \tilde{A} 的行向量线性

\Leftrightarrow 它的系数行列式为 $0 \Leftrightarrow |a_{ij}|=0$.

定义 16 在一个 $s \times n$ 矩阵 A 中任意选定 k 行和 k 列, 位于这些选定的行和列的交点上的 k^2 个元素按原来的次序所组成的 k 级行列式, 称为 A 的一个 k 级子式.

在定义中, 当然有 $k \leq \min(s, n)$, 这里 $\min(s, n)$ 表示 s, n 中较小的一个.

定理 6 一矩阵的秩是 r 的充要条件为矩阵中有一个 r 级子式不为零, 同时所有 $r+1$ 级子式全为零.

证明: “ \Rightarrow ”: $R(A) = r$, 即 A 的行向量的极大无关组含 r 个向量, 则 A 的任意 $r+1$ 个行向量必线性相关, 则 A 的任意 $r+1$ 阶子式的行向量也线性相关, 否则若 A 的某个 $r+1$ 个行向量线性无关, 则它们的延长向量组是 A 的 $r+1$ 个线性无关的行向量, 矛盾. 由定理 5 的推论 2 这样的 $r+1$ 子式全为零.

现证: A 至少有一个 r 阶的非零子式, 因 $R(A) = r$, 则 A 有 r 个行向量线性无关, 不妨设 A 的前 r 个行向量线性无关, 作一个新的矩阵

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rn} \end{pmatrix}$$

则 \tilde{A} 的行秩 $= r$, 于是 \tilde{A} 的列秩也为 r , 故 \tilde{A} 有 r 个列向量线性无关, 不妨设 \tilde{A} 的前 r 个

列向量线性无关, 由定理 5 的推论 2, $\Rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$.

“ \Leftarrow ”: 设 A 有一个 r 级子式不等于 0, 且 A 的所有 $r+1$ 级子式等于 0, 往证 $R(A) = r$.

由行列式按一行展开的公式可知, 如果 A 的所有 $r+1$ 级子式等于 0, 则 A 的所有 $r+2$ 级子式等于 0, 进而 A 的所有 $> r$ 级子式等于 0.

令 $R(A) = t$, 设 $t < r$, 由必要性, A 的所有 $t+1$ 级子式等于 0, 进而 A 的所

有 $>t$ 阶的子式等于 0, 则 A 的 r 阶子式全为零, 与 A 至少有一个非零的 r 阶子式矛盾, 故 $t \geq r$.

设 $t > r$, 由必要性, A 有一个 t ($t \geq r+1$) 阶子式不为零, 与 A 的 $r+1$ 阶子式全为零矛盾, 故 $t \leq r$. 综之 $t = r$, 即 $R(A) = r$.

从定理的证明可以看出, 这个定理实际上包含两部分, 一部分是, 矩阵 A 的秩 $\geq r$ 的充要条件为有一个 r 级子式不为零; 另一部分是, 矩阵的秩 $\leq r$ 的充要条件为的所有 $r+1$ 级子式全为零. 从定理的证明还可以看出, 在秩为 r 的矩阵中, 不为零的 r 级子式所在的行正是它行向量组的一个极大线性无关组, 所在的列正是它列向量的一个极大线性无关组.

(三) 矩阵的秩的计算

1. **定义法:** 求 A 的行(列)向量组的秩;

即求出 A 的行(列)向量组的任意极大无关组, 极大无关组所含向量的个数即为 A 的秩.

2. **定理法:** 利用定理 6, 秩 A 即 A 的非 0 子式的最大阶数;

即求出 A 的非 0 子式的最大阶数.

3. **初等变换法:** 化 A 为行(列)阶梯阵.

命题: 初等变换不改变矩阵 A 的秩.

证明: 因三种行初等变换将 A 的行向量组变成等价的行向量组, 而等价向量组有相同的秩, 从而初等变换不改变矩阵 A 的行秩, 从而行初等变换不改变矩阵 A 的秩. 平行的三种列初等变换将 A 的列向量组变成等价的列向量组, 从而初等变换不改变矩阵 A 的列秩, 从而列初等变换不改变矩阵 A 的秩.

由此命题, 求 A 的秩可利用初等变换化矩阵为行(列)阶梯阵, 则行(列)阶梯阵的非零行(列)数即为 A 的秩.

因行向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的秩, 即 $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_s \end{pmatrix}$ 的行秩, 故可用初等变换求矩阵 A

的秩, 从而

得 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的秩. 因列向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 的秩, 即 $A = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t)$ 的列秩, 故可用初等变换求矩阵 A 的秩, 从而 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 得的秩.

例2 给矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 7 & 10 \\ 1 & 3 & 4 & 9 & 13 \\ 1 & 4 & 5 & 11 & 16 \end{pmatrix}$

求列向量组 $\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \beta_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix}, \beta_5 = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ 13 \\ 16 \end{pmatrix}$ 的极大无关组,

并且用极大无关组表示其它列向量.

求行向量组 $\alpha_1 = (1,1,2,5,7), \alpha_2 = (1,2,3,7,10), \alpha_3 = (1,3,4,9,13), \alpha_4 = (1,4,5,11,16)$ 的极大无关组, 并且用极大无关组表示其它行向量.

解: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 7 & 10 \\ 1 & 3 & 4 & 9 & 13 \\ 1 & 4 & 5 & 11 & 16 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B,$

因 $AX = 0, BX = 0$ 同解, 所以 A 的列向量 β_1, \dots, β_5 与 B 的列向量 $\tilde{\beta}_1, \dots, \tilde{\beta}_5$ 有相同的线性关系, 因 $\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2$ 线性无关, 则 β_1, β_2 也线性无关.

因 $\tilde{\beta}_3 = \tilde{\beta}_1 + \tilde{\beta}_2, \tilde{\beta}_4 = 3\tilde{\beta}_1 + 2\tilde{\beta}_2, \tilde{\beta}_5 = 4\tilde{\beta}_1 + 3\tilde{\beta}_2,$

则 $\beta_3 = \beta_1 + \beta_2, \beta_4 = 3\beta_1 + 2\beta_2, \beta_5 = 4\beta_1 + 3\beta_2$

故 β_1, β_2 是向量组 β_1, \dots, β_5 的极大无关组.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 7 & 10 \\ 1 & 3 & 4 & 9 & 13 \\ 1 & 4 & 5 & 11 & 16 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = C$

A 的行向量 $\alpha_1, \dots, \alpha_4$ 与 C 的列向量 $\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_4$ 有相同的线性关系, 因 $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2$ 线性无关, 则 α_1, α_2 也线性无关. 而 $\tilde{\alpha}_3 = -\tilde{\alpha}_1 + 2\tilde{\alpha}_2$, $\tilde{\alpha}_4 = -2\tilde{\alpha}_1 + 3\tilde{\alpha}_2$, 故而 $\alpha_3 = -\alpha_1 + 2\alpha_2$, $\alpha_4 = -2\alpha_1 + 3\alpha_2$, 于是 α_1, α_2 是行向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_4$ 的极大线性无关组.

上面的讨论说明, 为了计算一个矩阵的秩, 只要用初等行变换把它变成阶梯形, 这个阶梯形矩阵中非零的行的个数就是原来矩阵的秩.

以上的讨论还说明, 用初等变换化一个线性方程组成阶梯形, 最后留下来的方程的个数与变换的过程无关, 因为它就等于增广矩阵的秩.

五、小结

1. 请叙述矩阵的秩的定义、齐次线性方程组有非零解的充要条件、子式的定义.
2. n 级方阵的行列式为 0 的充要条件?
3. 求矩阵的秩的方法有哪些?

六、作业 (见习题册)

七、教学反思

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}$$

与增广矩阵

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} & b_s \end{pmatrix}$$

有相同的秩.

证: 若(1)有解, 则 β 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表出, 于是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 与 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta$ 等价, 所以 $R(A) = R(\bar{A})$.

反过来, 若 $R(A) = R(\bar{A})$, 则秩 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} = \text{秩}\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta\}$. 设 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ 为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 的一个极大无关组, 则 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ 也为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta$ 的一个极大无关组, 所以, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 与 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta$ 等价, 从而 β 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表出, 于是方程组(1)有解.

应该指出, 这个判别条件与以前的消元法是一致的. 用消元法解线性方程组(1)的第一步就是用初等行变换把增广矩阵 \bar{A} 化成阶梯形. 这个阶梯形矩阵在适当调动前列的顺序之后可能有两种情形:

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1r} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2r} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{rr} & \cdots & c_{rn} & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

或者

$$D_3 = \begin{vmatrix} a & 1 & 4 \\ 1 & b & 3 \\ 1 & 2b & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & 4 \\ 1 & b & 3 \\ 0 & b & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1-4b & 0 \\ 1 & b & 3 \\ 0 & b & 1 \end{vmatrix} = 4b - 2ab - 1$$

(1) $b \neq 0$, 且 $a \neq 1$ 时方程组有唯一组解

$$x_1 = \frac{1-2b}{b(1-a)}, \quad x_2 = \frac{1}{b}, \quad x_3 = \frac{4b-2ab-1}{b(1-a)}$$

(2) 当 $b=0$ 时, 原方程组为

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_3 = 4 \end{cases}, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

秩 $A=2$, 而 $R(\bar{A})=3$, 故此时方程组无解.

(3) 当 $a=1$ 时, 原方程组为
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + bx_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2bx_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & b & 1 & 3 \\ 1 & 2b & 1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & b-1 & 0 & -1 \\ 0 & 2b-1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

当 $b \neq \frac{1}{2}$ 时, $R(A)=2$, 而 $R(\bar{A})=3$, 此时方程组无解

当 $b = \frac{1}{2}$ 时, $R(A) = R(\bar{A}) = 2$, 此时

$$\bar{A} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

解得: $\begin{cases} x_1 = 2 - x_3 \\ x_2 = 2 \end{cases}$, 其中 x_3 为自由未知量. 令 $x_3 = k$,

得 $\begin{cases} x_1 = 2 - k \\ x_2 = 2 \\ x_3 = k \end{cases}$ 为原方程组的任意解, 其中 k 为任意常数.

例 2 讨论线性方程组是否有解?
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ ax_1 + bx_2 + cx_3 = d \\ a^2x_1 + b^2x_2 + c^2x_3 = d^2 \\ a^3x_1 + b^3x_2 + c^3x_3 = d^3 \end{cases}$$

a, b, c, d 各不相同.

解: 因

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c) \neq 0$$

则 $R(\bar{A}) = 4, R(A) = 3$, 故原方程组无解.

例 3 设 n 阶矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & \cdots & a \end{pmatrix}$, 试讨论 $AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ 的解的情况, 有解时,

求出解来.

解: 因 $|A| = (a + (n-1)b)(a-b)^{n-1}$

(1) 当 $a \neq b$, 且 $a \neq (1-n)b$ 时, $|A| \neq 0$, 因而 $AX = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ 有唯一解, 且解为:

$$x_1 = \cdots = x_n = \frac{1}{a + (n-1)b}.$$

(2) 当 $a = b \neq 0$ 时, 原方程组化为 $ax_1 + ax_2 + \cdots + ax_n = 1$,

$\Rightarrow x_1 = \frac{1}{a} - (x_2 + \cdots + x_n)$, 其中 x_2, \cdots, x_n 为自由未知量.

(3) 当 $a = b = 0$ 时, 原方程组无解.

(4) 当 $a + (n-1)b = 0$ 即 $a = (1-n)b$ 时, 原方程组无解.

因为将每一方程加到第 1 个方程得 $0 = n$, 矛盾.

五、小结

1. 请叙述线性方程组(1)有解的充要条件.
2. 求线性方程组解的步骤有那几步?

六、作业 (见习题册)

七、教学反思

$$k\alpha + l\beta = \begin{pmatrix} kk_1 + ll_1 \\ kk_2 + ll_2 \\ \vdots \\ kk_n + ll_n \end{pmatrix}, \text{ 因 } \alpha, \beta \text{ 是 (1) 的解, 即 } \sum_{j=1}^n a_{ij}k_j = 0, \sum_{j=1}^n a_{ij}l_j = 0, i=1,2,\dots,n.$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^n a_{ij}(k_j + l_j) = \sum_{j=1}^n a_{ij}k_j + \sum_{j=1}^n a_{ij}l_j = 0 + 0 = 0;$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}kk_j = k \sum_{j=1}^n a_{ij}k_j = k \cdot 0 = 0;$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}(kk_j + ll_j) = k \sum_{j=1}^n a_{ij}k_j + l \sum_{j=1}^n a_{ij}l_j = k \cdot 0 + l \cdot 0 = 0.$$

故 $\alpha + \beta, k\alpha, k\alpha + l\beta$ 仍是 (1) 的解.

从几何上看, 这两个性质是清楚的. 在 $n=3$ 时, 每个齐次方程表示一个过得点的平面. 于是方程组的解, 也就是这些平面的交点, 如果不只是原点的话, 就是一条过原点的直线或一个过原点的平面. 以原点为起点, 而端点在这样的直线或平面上的向量显然具有上述的性质.

对于齐次线性方程组, 综合以上两点即得, 解的线性组合还是方程组的解. 这个性质说明了, 如果方程组有几个解, 那么这些解的所有可能的线性组合就给出了很多的解. 基于这个事实, 我们要问: 齐次线性方程组的全部解是否能够通过它的有限的几个解的线性组合给出?

定义 17 齐次线性方程组 (1) 的一组解 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t$ 称为 (1) 的一个基础解系, 如果

- 1) (1) 的任一个解都能表成 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t$ 的线性组合;
- 2) $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t$ 线性无关.

应该注意, 定义中的条件 2) 是为了保证基础解系中没有多余的解.

定理 8 在齐次线性方程组有非零解的情况下, 它有基础解系, 并且基础

的常数项换成 0, 就得到齐次线性方程组(1). 齐次线性方程组(1)称为方程组(9)的导出组. 方程组(9)的解与它的导出组(1)的之间有密切的关系:

1. 线性方程组(9)的两个解的差是它的导出组(1)的解.
2. 线性方程组(9)的一个解与它的导出组(1)的一个解之和还是这个线性方程组的一个解.

定理 9 如果 γ_0 是线性方程组(9)的一个特解, 那么线性方程组(9)的任何一个解 γ 都可以表成

$$\gamma = \gamma_0 + \eta$$

其中 η 是导出组(1)的一个解. 因此, 对于线性方程组(9)的任一个特解 γ_0 , 当 η 取遍它的导出组的全部解时, (10)就给出(9)的全部解.

定理 9 说明了, 为了找出一线性方程组的全部解, 只要找出它的一个特殊的解以及它的导出组的全部解就行了. 导出组是一个齐次线性方程组, 在上面已经看到, 一个齐次线性方程组的解的全体可以用基础解系来表示. 因此, 根据定理我们可以用导出组的基础解系来表出一般线性方程组的一般解; 如果 γ_0 是线性方程组(9)的一个特解, $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-r}$ 是其导出组的一个基础解系, 那么(9)的任一个解 γ 都可以表成

$$\gamma = \gamma_0 + k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \dots + k_{n-r}\eta_{n-r}$$

推论 在线性方程组(9)有解的条件下, 解是唯一的充要条件是它的导出组(1)只有零解.

证: “ \Rightarrow ” 设(3)有唯一解 γ_0 . 若其导出组(4)有非零解 η , 则有 $k\eta$ 也为(4)的解, $k \in P$, 从而 $\gamma_0 + k\eta$ 皆为(3)的解 ($k \in P$), 矛盾.

“ \Leftarrow ” 若(3)有两个不同的解 γ_1, γ_2 , 则 $\gamma_1 - \gamma_2 \neq 0$, 且 $\gamma_1 - \gamma_2$ 为(4)的一个非零解, 矛盾.

线性方程组的理论与解析几何中关于平面与直线的讨论有密切的关系.

来看线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2. \end{cases} \quad (11)$$

(11)中每一个方程表示一个平面,线性方程组(11)有没有解的问题就相当于这两个平面有没有交点的问题.我们知道,两个平面只有在平行而不重合的情形没有交点.(11)的系数矩阵与增广矩阵分别是

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \text{ 与 } \bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \end{pmatrix},$$

它们的秩可能是 1 或者 2. 有三个可能的情形:

1. 秩 $A = \text{秩 } \bar{A} = 1$. 这就是的两行成比例,因而这两个平面平行.又因为 \bar{A} 的两行也成比例,所以这两个平面重合.方程组有解.

2. 秩 $A = 1$, 秩 $\bar{A} = 2$. 这就是说,这两个平面平行而不重合.方程组无解.

3. 秩 $A = 2$. 这时 \bar{A} 的秩一定也是 2. 在几何上就是这两个平面不平行,因而一定相交.方程组有解.

求一般线性方程组(3)的一般解的步骤:

1) 求出其导出组的基础解系 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t$;

2) 求出其一个特解 γ_0 ;

3) (3) 的一般解为 $\gamma = \gamma_0 + k_1\eta_1 + \dots + k_t\eta_t$.

例 2 求解方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_2 - 3x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - 2x_2 + 3x_4 = -1/2 \end{cases}$$

解:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & -1/2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2-r_1 \\ r_3-r_1}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1/2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{r_3+0.5r_2 \\ r_1+r_2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

可见 $R(A) = R(\bar{A})$, 方程组有解, 并有

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + x_4 + 1/2 \\ x_3 = 2x_4 + 1/2 \end{cases}$$

取 $x_2 = x_4 = 0$, 则 $x_1 = x_3 = 1/2$, 即得原方程组的一个特解 $\gamma_0 = (1/2, 0, 1/2, 0)^T$.

下面求导出组的基础解系:

$$\text{导出组与 } \begin{cases} x_1 = x_2 + x_4 \\ x_3 = 2x_4 \end{cases} \text{ 同解.}$$

取 $x_2 = 1, x_4 = 0$, 得 $\eta_1 = (1, 1, 0, 0)^T$;

取 $x_2 = 0, x_4 = 1$, 得 $\eta_2 = (1, 0, 2, 1)^T$.

于是原方程组的通解为 $\gamma = \gamma_0 + k_1 \eta_1 + k_2 \eta_2$ ($k_1, k_2 \in \mathbb{R}$).

下面再来看看线性方程组的解的几何意义. 设矩阵 A 的秩为 2, 这时一般解中有一个自由未知量, 譬如说是 x_3 , 一般解的形式为

$$\begin{cases} x_1 = d_1 + c_1 x_3, \\ x_2 = d_2 + c_2 x_3. \end{cases} \quad (12)$$

从几何上看, 两个不平行的平面相交在一条直线. 把(12)改写一下就是直线的点向式方程

$$\frac{x_1 - d_1}{c_1} = \frac{x_2 - d_2}{c_2} = x_3.$$

如果引入参数 t , 令 $x_3 = t$, (12)就成为

$$\begin{cases} x_1 = d_1 + c_1 t, \\ x_2 = d_2 + c_2 t, \\ x_3 = t. \end{cases} \quad (13)$$

这就是直线的参数方程.

(11)的导出方程组是

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0. \end{cases} \quad (14)$$

从几何上看, 这是两个分别与(11)中平面平行的且过原点的平面, 因而它们的交线过原点且与直线(12)平行. 既然与直线(12)平行, 也就是有相同的方

向, 所以这条直线的参数方程就是

$$\begin{cases} x_1 = c_1 t, \\ x_2 = c_2 t, \\ x_3 = t. \end{cases} \quad (15)$$

(13) 与 (15) 正说明了线性方程组 (11) 与它的导出组 (14) 的解之间的关系.

五、小结

1. 请叙述齐次线性方程组解的性质.
2. 什么情况下, 齐次线性方程组有基础解系? 如何求齐次线性方程组的基础解系?
3. 请叙述线性方程组解的性质.
4. 什么情况下, 线性方程组有无穷多个解, 这些解如何用导出组的基础解系和特解表示?

六、作业 (见习题册)

七、教学反思

第三章线性方程组习题讲解

(习题册以及教材上的课后习题)