第五节 对角矩阵

主要内容

- 充分必要条件
- 特征值与特征向量的性质
- 举例

一、充分必要条件

对角矩阵可以认为是矩阵中最简单的一种. 现在我们来考察，究竟哪些线性变换的矩阵在一组适当的基下可以是对角矩阵.

定理 7 设 $\mathscr{A}$ 是 n 维线性空间 V 的一个线性变换，$\mathscr{A}$ 的矩阵可以在某一组基下为对角矩阵的充分必要条件是，$\mathscr{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量.

证明 设$\mathscr{A}$ 在基$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$下具有对角矩阵

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

即

$$\mathscr{A}\varepsilon_i = \lambda_i \varepsilon_i,\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

因此，$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$就是$\mathscr{A}$ 的 n 个线性无关的特征向量.

反过来，如果 $\mathscr{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$，那么就取 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 为基，显然在这组基下 $\mathscr{A}$ 的矩阵是对角矩阵.

证毕

二、特征值与特征向量的性质

定理 8 属于不同特征值的特征向量是线性无关.

证明 对特征值的个数作数学归纳法. 由于特征向量是不为零的, 所以单个的特征向量必然线性无关. 现在设属于 k 个不同特征值的特征向量线性无关, 我们证明属于 $k+1$ 个不同的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k+1}$ 的特征向量 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{k+1}$ 也线性无关.

假设有关系式

$$a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \dots + a_k\xi_k + a_{k+1}\xi_{k+1} = 0$$

成立. 等式两端乘以 λ_{k+1}，得

$$a_1\lambda_{k+1}\xi_1 + a_2\lambda_{k+1}\xi_2 + \dots + a_k\lambda_{k+1}\xi_k + a_{k+1}\lambda_{k+1}\xi_{k+1} = 0$$

第一式两端同时施行变换 $\mathscr{A}$ ，得

$$a_1\lambda_1\xi_1 + a_2\lambda_2\xi_2 + \dots + a_k\lambda_k\xi_k + a_{k+1}\lambda_{k+1}\xi_{k+1} = 0$$

第三式减去第二式得

$$a_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1})\xi_1 + \dots + a_k(\lambda_k - \lambda_{k+1})\xi_k = 0 .$$

根据归纳法假设，$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$ 线性无关，于是

$$a_i(\lambda_i - \lambda_{k+1}) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

但 $\lambda_i - \lambda_{k+1} \neq 0\ (i \leq k)$，所以

$$a_i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

这时等式

$$a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \ldots + a_k\xi_k + a_{k+1}\xi_{k+1} = 0$$

变成 $a_{k+1}\xi_{k+1} = 0$． 又因为 $\xi_{k+1} \neq 0$，所以只有

$$a_{k+1} = 0.$$

所以 $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{k+1}$ 线性无关. 证毕

从上面这两个定理就得到

推论 1 如果在 n 维线性空间 V 中，线性变换 $\mathscr{A}$ 的特征多项式在数域 P 中有 n 个不同的根，即 $\mathscr{A}$ 有 n 个不同的特征值，那么 $\mathscr{A}$ 在某组基下的矩阵是对角形的.

因为在复数域中任一个 n 次多项式都有 n 个根，所以上面的论断可以改写成

推论 2 在复数域上的线性空间中，如果线性变换 $\mathscr{A}$ 的特征多项式没有重根，那么 $\mathscr{A}$ 在某组基下的矩阵是对角形的.

在一个线性变换没有 n 个不同的特征值的情形要判别这个线性变换的矩阵能不能成为对角形，问题就要复杂些. 为了利用定理 7，把定理 8 推广为

定理 9 如果 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ 是线性变换 $\mathscr{A}$ 的不同的特征值，而 $\alpha_{i1}, \cdots, \alpha_{ir_i}$ 是属于特征值 λ_i 的线性无关的特征向量，$i=1,\ldots,k$，那么向量组 $\alpha_{11}, \cdots, \alpha_{1r_1}, \cdots, \alpha_{k1}, \cdots, \alpha_{kr_k}$ 也线性无关.

这个定理的证明与定理 8 的证明相仿，也是对 k 作数学归纳法．证明略.

设 $\mathscr{A}$ 全部不同的特征值是 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$，于是 $\mathscr{A}$ 在某一组基下的矩阵是对角形的充分必要条件是 $\mathscr{A}$ 的特征子空间 $V_{\lambda_1}, \cdots, V_{\lambda_r}$ 的维数之和等于空间的维数.

当线性变换 $\mathscr{A}$ 在一组基下的矩阵 A 是对角形时:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

$\mathscr{A}$ 的特征多项式就是

$$|\lambda E - A| = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n).$$

因此，如果线性变换 $\mathscr{A}$ 在一组基下的矩阵是对角形，那么主对角线上的元素除排列次序外是确定的。

它们正是 A 的特征多项式全部的根(重根按重数计算)。

三、举例

例 1 设线性变换 $\mathscr{A}$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 5 & -3 & 3\\ -1 & 0 & -2\end{pmatrix}$$

问是否存在一组基，使 $\mathscr{A}$ 在这组基下的矩阵为对角形？若存在，求出这组基.

解

例 2 设线性变换 $\mathscr{A}$ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

问是否存在一组基，使 $\mathscr{A}$ 在这组基下的矩阵为对角形？若存在，求出这组基.

解

例 3 设 $A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

(1) 判断 A 是否与对角矩阵相似，若相似，求可逆矩阵 X，使 $X^{-1}AX$ 为对角矩阵；

(2) 求 A^k（k 为正整数）.

解