第五节 线性方程组有解判别定理

主要内容

- 线性方程组的向量表示形式
- 线性方程组有解判别定理
- 一般线性方程组的解法
- 线性方程组的求解步骤

一、线性方程组的向量表示形式

设线性方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \,, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \,, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s \,. \end{cases} \tag{1}$$

引入向量

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{s1} \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{s2} \end{pmatrix}, \cdots, \alpha_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{sn} \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_s \end{pmatrix}, \tag{2}$$

于是线性方程组(1) 可以改写成向量方程

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \ldots + x_n\alpha_n = \beta. \qquad (3)$$

线性方程组(1) 有解的充分必要条件为

向量 β 可以表示成向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 的线性组合.

问：线性方程组（1）有解的充要条件用秩的概念如何表示?

二、线性方程组有解判别定理

定理 7 线性方程组 (1) 有解的充分必要条件是系数矩阵 A 与增广矩阵 $\overline{A}$ 有相同的秩.

证明 先证必要性. 设线性方程组 (1) 有解，就是说，β 可以经向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表出.

由此立即推出，向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 与 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta$ 等价，因而有相同的秩. 这两个向量组分别是矩阵 A 与 $\overline{A}$ 的列向量组. 因此，矩阵 A 与 $\overline{A}$ 有相同的秩.

再证充分性. 设矩阵 A 与 $\bar{A}$ 有相同的秩,

于是, 它们的列向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 与 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta$

有相同的秩为 r. $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 的极大线性无关组是由 r 个

向量组成,不妨设 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ 是它的一个极大线性无关组.

下证 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, \beta$ 线性相关.

若不然 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, \beta$ 线性无关, 这与它的秩为 r 矛盾.

因此向量 β 可以经 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ 线性表出, β 当然可以

经 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 线性表出.

因此, 方程组 (1) 有解. 证毕

定理7判别线性方程组（1）有解的条件与消元法判断线性方程组（1）有解的关系?

用消元法解线性方程组 (1) 的第一步就是用初等行变换把增广矩阵 $\overline{A}$ 化成阶梯形. 这个阶梯形矩阵在适当调动前 n 列的顺序之后可能有两种情形:

情形一：

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1r} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2r} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{rr} & \cdots & c_{rn} & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

其中 $c_{ii} \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, r$, $d_{r+1} \neq 0$.

文山学院 WENSHAN UNIVERSITY

情形二：

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1r} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2r} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{rr} & \cdots & c_{rn} & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

其中 $c_{ii} \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, r$.

情形一，原方程组无解.

情形二，原方程组有解.

把这个阶梯形矩阵中最后一列去掉，那就是线性方程组(1)的系数矩阵 A 经过初等行变换所化成的阶梯形.

这就是说，当系数矩阵与增广矩阵的秩相等时，方程组有解；当增广矩阵的秩等于系数矩阵的秩加 1 时，方程组无解.

三、一般线性方程组的解法

设线性方程组 (1) 有解，矩阵 A 与 $\overline{A}$ 的秩都为 r

而 D 是矩阵 A 的一个不为零的 r 级子式（当然它也是

$\overline{A}$ 的一个不为零的子式)，为了方便

不妨设 D 位于 A 的左上角.

在这种情况下，$\overline{A}$ 的前 r 行就是一个极大线性无关组，

第 $r+1,\ldots,s$ 行都可以经它们线性表出.

因此，方程组 (1) 与

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \,, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \,, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rn}x_n = b_r \,. \end{cases} \qquad (4)$$

同解.

当 $r = n$ 时，由克拉默法则，方程组(4)有唯一解，也就是方程组 (1) 有唯一解.

文山学院 WENSHAN UNIVERSITY

当 $r<n$ 时，将方程组 (4) 改写为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1r}x_r=b_1-a_{1,r+1}x_{r+1}-\cdots-a_{1n}x_n\,, \\ a_{21}x_1+\cdots+a_{2r}x_r=b_2-a_{2,r+1}x_{r+1}-\cdots-a_{2n}x_n\,, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{r1}x_1+\cdots+a_{rr}x_r=b_r-a_{r,r+1}x_{r+1}-\cdots-a_{rn}x_n\,. \end{cases} \qquad (5)$$

方程组 (5) 作为以 $x_1, x_2, \ldots, x_r$ 为变量的一个方程组，它的系数行列式 $D\neq 0$. 由克拉默法则，对于 $x_{r+1},\ldots,$ x_n 的任意一组值，方程组 (5) 有唯一解，也就是方程组 (1)，都有唯一解.

$x_{r+1},\cdots,x_n$ 就是方程组(1)的一组自由未知量.

对 (5) 用克拉默法则，可以解出 $x_1, x_2, \dots, x_r$：

$$\begin{cases} x_1 = d_1' + c_{1,r+1}' x_{r+1} + \cdots + c_{1n}' x_n , \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r = d_r' + c_{r,r+1}' x_{r+1} + \cdots + c_{rn}' x_n , \end{cases} \tag{6}$$

(6) 就是方程组 (1) 的一般解.

上述一般线性方程组的求解方法，可归纳成以下步骤：

四、线性方程组的求解步骤

设有线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 , \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 , \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s . \end{cases}$$

有解. 它所对应的向量组为

$$\alpha_i = (a_{i1} , a_{i2} , \ldots , a_{in} , b_i) , \quad i = 1, 2, \ldots , s$$

则其求解步骤如下：

STEP 1：求保留方程组

所谓**保留方程组**就是把原方程组中多余的方程去掉后剩下来的方程构成的方程组. 求保留方程组的方法是：若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性无关，则原方程组中没有多余的方程，其保留方程组就是它本身；若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性相关，则原方程组中有多余的方程，其保留方程组由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 的一个极大线性无关组所对应的方程组成，保留方程组中方程的个数为向量组 $\alpha_1, \alpha_2,$

$\ldots, \alpha_s$ 的秩. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 的秩为 r.

STEP 2：在保留方程组中找出 r 个未知量，使它们的系数行列式不为零. 把这 r 个未知量作为非自由未知量，剩下的 $n-r$ 个未知量作为自由未知量，并把保留方程组变形：非自由未知量留在左边，自由未知量移到方程的右边.

STEP 3：把自由未知量看作已知数，用克拉默法则解出非自由未知量即得方程组的一般解.

例 1　解线性方程

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad + x_5 = 1, \\ 3x_1 + 3x_2 \qquad - x_4 + 2x_5 = 1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \qquad = 1. \end{cases}$$

解　　首先来判别方程组是否有解.

把方程组的增广矩阵化为行阶梯形

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&1&-1&-1&1&0\\2&2&1&0&1&1\\3&3&0&-1&2&1\\1&1&2&1&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&1&-1&-1&1&0\\0&0&3&2&-1&1\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

因为系数矩阵和增广矩阵的秩均为2，所以方程组有解．它的一个同解方程组是

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_3 + 2x_4 - x_5 = 1. \end{cases}$$

把 x_1, x_5 取作非自由未知量，x_2, x_3, x_4 当作自由未知量，并把方程组变形成

$$\begin{cases} x_1 + x_5 = -x_2 + x_3 + x_4, \\ -x_5 = 1 - 3x_3 - 2x_4. \end{cases}$$

解之得方程组的一般解为 $\begin{cases} x_1 = 1 - x_2 - 2x_3 - x_4, \\ x_5 = -1 + 3x_3 + 2x_4. \end{cases}$

小结和作业

1. 请叙述线性方程组(1)有解的充要条件.

2. 求线性方程组解的步骤有那几步?

3.作业见学习通.