

第二节 n 维向量空间

主要内容

- 问题的提出
- n 维向量的定义
- n 维向量的运算
- n 维向量空间
- 线性方程组与向量组的关系

一、问题的提出

问题：

1. 能否用消元法直接从原线性方程组来看出它是否有解？
2. 用消元法化方程组成阶梯形，剩下来的方程的个数是否唯一决定？

譬如说，在方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = -1, \end{cases}$$

中，第一个方程的 -3 倍加分第二个方程到第三个方程等于第二个方程的负1倍，这就是说，第三个方程可以去掉而不影响方程组的解。

在用初等变换得到的阶梯形方程组中只含有两个方程正是反映了这个情况。

可以认为，初等变换是揭露方程之间的关系的一种方法。

因此，为了直接从原来的线性方程组来讨论解的情况，

有必要来研究方程之间的关系。

$$\text{一个 } n \text{ 元方程 } a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

可以用 $n + 1$ 元有序数组

$$(a_1, a_2, \dots, a_n, b)$$

来代表，所谓方程之间的关系实际上就是代表它们的

$n + 1$ 元有序数组之间的关系。

因此，先来讨论多元有序数组。

n 元有序数组的应用举例

多元有序数组不只是可以代表线性方程，
而且还与其他方面有极其广泛的联系。

例如 点的坐标 点的坐标是多元有序数组。

例如 球的大小和位置

即球的大小和位置要用 4 元有序数组来表示。

二、 n 维向量的定义

定义 2 所谓数域 P 上一个 n 维向量就是

由数域 P 中 n 个数组成的有序数组

$$(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

a_i 称为向量的分量.

思考： 当 $n=2,3$, 且 $P=\mathbb{R}$ 时的情况？

用小写希腊字母 α, β, γ 等来代表向量.

三、 n 维向量的运算

1. 两个向量相等

定义 3 如果 n 维向量

$$\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n), \beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)$$

的对应分量都相等，即

$$a_i = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

就称这两个向量是**相等的**，记作 $\alpha = \beta$.

2. 向量的加法

1) 定义

定义 4 向量

$$\gamma = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$$

称为向量

$$\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n), \beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)$$

的和, 记为

$$\gamma = \alpha + \beta.$$

2) 运算规律

交换律 $\alpha + \beta = \beta + \alpha.$

结合律 $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma.$

3) 零向量和负向量

定义 5 分量全为零的向量 $(0, 0, \dots, 0)$ 称为**零向量**,

记 $\mathbf{0}$; 向量 $(-a_1, -a_2, \dots, -a_n)$ 称为向量 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$

的**负向量**, 记为 $-\alpha$.

对于所有的 α , 有 $\alpha + \mathbf{0} = ?$ $\alpha + (-\alpha) = ?$

4) 向量减法运算

定义 6 $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$.

3. 数量乘积

1) 定义

定义 7 设 k 为数域 P 中的数, 向量

$$(ka_1, ka_2, \dots, ka_n)$$

称为向量 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ 与数 k 的**数量乘积**,

记为 $k\alpha$.

2) 运算规律

$$k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta,$$

$$(k + l)\alpha = k\alpha + l\alpha,$$

$$k(l\alpha) = (kl)\alpha,$$

$$1\alpha = \alpha,$$

$$0\alpha = 0,$$

$$(-1)\alpha = -\alpha,$$

$$k0 = 0.$$

如果 $k \neq 0$, $\alpha \neq 0$, 那么 $k\alpha \neq 0$.

四、 n 维向量空间

定义 8 以数域 P 中的数作为分量的 n 维向量的全体，同时考虑到定义在它们上面的加法和数量乘法，称为数域 P 上的 n 维向量空间。

在 $n = 3$ 时，3 维实向量空间可以认为就是几何空间中全体向量所成的空间。

以上已把数域 P 上全体 n 维向量的集合组成一个有加法和数量乘法的代数结构，即数域 P 上 n 维向量空间。

向量通常写成一行：

行向量

$$\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n).$$

有时候也可以写成一列：

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

列向量

它们只是写法上不同

五、线性方程组与向量组的关系

在定义了 n 维向量以后，线性方程组中的方程就可用向量来表示，因而线性方程组就可用向量组来表示。

设有线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s, \end{cases} \quad (1)$$

若令

$$\alpha_1 = (a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}, b_1),$$
$$\alpha_2 = (a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n}, b_2),$$

• • • • •

$$\alpha_s = (a_{s1}, a_{s2}, \cdots, a_{sn}, b_s),$$

则可用向量组 $A: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 来表示方程组 (1)
或称向量组 A 是由方程组 (1) 所确定的向量组;
反之, 若给定向量组 A , 则可唯一地确定线性方
程组, 也即**线性方程组与向量组一一对应**.

小结和作业

1. 请叙述向量空间的定义.
2. 请叙述向量空间的中加法和数乘向量满足的8个重要性质.
3. 作业见学习通.