

第二节

线性空间的定义与简单性质

主要内容

- 引入
- 定义
- 线性空间的简单性质

一、引入

例 1 在解析几何中，讨论过三维空间中的向量。

向量的基本属性是可以按平行四边形规律**相加**，

也可以与实数作**数量乘法**。

不少几何和力学对象的性质是可以通过向量的这两种运算来描述的。

例 2 为了解线性方程组，我们讨论过以 n 元有序数组 (a_1, a_2, \dots, a_n) 作为元素的 n 维向量空间。对于它们，也有**加法**和**数量乘法**，那就是

$$\begin{aligned} & (a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) \\ &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n), \\ & k(a_1, a_2, \dots, a_n) = (k a_1, k a_2, \dots, k a_n). \end{aligned}$$

例 3 对于函数，也可以定义**加法**和函数与实数的**数量乘法**。譬如说，考虑全体定义在区间 $[a,b]$ 上的连续函数。我们知道，连续函数的和是连续函数，连续函数与实数的数量乘积还是连续函数。

二、定义

定义 6 设 V 是一个非空集合, P 是一个数域.

在集合 V 的元素之间定义了一种代数运算, 叫做

加法; 这就是说, 给出了一个法则, 对于 V 中任

意两个元素 α 与 β , 在 V 中都有唯一的一个元素

γ 与它们对应, 称为 α 与 β 的和, 记为 $\gamma = \alpha + \beta$.

在数域 P 与集合 V 的元素之间还定义了一种运算,

叫做 **数量乘法**; 这就是说, 对于数域 P 中任一

数 k 与 V 中任一元素 α , 在 V 中都有唯一的一个

元素 δ 与它们对应，称为 k 与 α 的**数量乘积**，记

$\delta = k\alpha$ 。如果加法与数量乘法满足下述规则，那么 V 称为数域 P 上的**线性空间**。

加法满足下面四条规则：

1) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$;

2) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$;

3) 在 V 中有一个元素 0 ，对于 V 中任一元素

α 都有 $\alpha + 0 = \alpha$

(具有这个性质的元素 0 称为 V 的**零元素**)；

4) 对于 V 中每一个元素 α , 都有 V 中的元素 β , 使得 $\alpha + \beta = 0$
(β 称为 α 的 **负元素**).

数量乘法满足下面两条规则:

5) $1\alpha = \alpha$;

6) $k(l\alpha) = (kl)\alpha$.

数量乘法与加法满足下面两条规则:

7) $(k+l)\alpha = k\alpha + l\alpha$;

8) $k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta$.

在以上規則中， k, l 等表示數域 P 中的任意數；
 α, β, γ 等表示集合 V 中任意元素。

由定義，幾何空間中全部向量組成的集合是一個實數域上的線性空間。分量屬於數域 P 的全体 n 元數組構成數域 P 上的一個線性空間，這個線性空間我們用 P^n 來表示。

下面再來舉幾個例子。

例 4 数域 P 上一元多项式环 $P[x]$, 按通常的多项式加法和数与多项式的乘法, 构成一个数域 P 上的线性空间. 如果只考虑其中次数小于 n 的多项式, 再添上零多项式也构成数域 P 上的一个线性空间, 用 $P[x]_n$ 表示. 但是, 数域 P 上的多项式集合

$$\{ p(x) \mid p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n, a_n \neq 0 \}$$

对同样的运算不构成线性空间, 因为两个 n 次多项式的和可能不是 n 次多项式.



例 5 元素属于数域 P 的 $m \times n$ 矩阵, 按矩阵的加法和矩阵与数的数量乘法, 构成数域 P 上的一个线性空间, 用 $P^{m \times n}$ 表示.

例 6 全体实函数, 按函数的加法和数与函数的数量乘法, 构成一个实数域上的线性空间.

例 7 数域 P 按照本身的加法与乘法, 即构成一个自身上的线性空间.

线性空间的元素也称为**向量**。当然，这里所谓向量比几何中所谓向量的涵义要广泛得多。线性空间有时也称为**向量空间**。一般用小写的希腊字母 $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ 表示线性空间 V 中的元素，用小写的拉丁字母 a, b, c, \dots 表示数域 P 中的数。

下面我们直接从定义来证明线性空间的一些简单性质。

三、线性空间的简单性质

1. 零元素是唯一的.

证明 假设 $0_1, 0_2$ 是线性空间 V 中的两个零元素. 只要证明 $0_1 = 0_2$ 即可. 考虑和

$$0_1 + 0_2$$

由于 0_1 是零元素, 所以 $0_1 + 0_2 = 0_2$. 又由于 0_2 也是零元素, 所以 $0_1 + 0_2 = 0_2 + 0_1 = 0_1$,

于是 $0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2$.

证毕

2. 负元素是唯一的.

这就是说, 适合条件 $\alpha + \beta = \mathbf{0}$ 的元素 β 是被元素 α 唯一决定的.

假设 α 有两个负元素 β 与 γ ,

$$\alpha + \beta = \mathbf{0}, \quad \alpha + \gamma = \mathbf{0}.$$

那么

$$\beta = \beta + \mathbf{0} = \beta + (\alpha + \gamma) = (\beta + \alpha) + \gamma = \mathbf{0} + \gamma = \gamma.$$

证毕

向量 α 的负元素记为 $-\alpha$.

利用负元素，我们定义减法如下：

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta).$$

$$3. \mathbf{0}\alpha = \mathbf{0}; k\mathbf{0} = \mathbf{0}; (-1)\alpha = -\alpha.$$

证明 $\alpha + \mathbf{0}\alpha = 1\alpha + \mathbf{0}\alpha = (1 + \mathbf{0})\alpha = 1\alpha = \alpha.$

所以 $\mathbf{0}\alpha = \mathbf{0}.$

$$\alpha + (-1)\alpha = 1\alpha + (-1)\alpha = [1 + (-1)]\alpha = \mathbf{0}\alpha = \mathbf{0},$$

所以 $(-1)\alpha = -\alpha.$

$$\begin{aligned} k\mathbf{0} &= k[\alpha + (-1)\alpha] = k\alpha + (-k)\alpha = [k + (-k)]\alpha \\ &= \mathbf{0}\alpha = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

所以 $k\mathbf{0} = \mathbf{0}.$

证毕

4. 如果 $k\alpha=0$, 那么 $k=0$ 或者 $\alpha=0$.

证明 假设 $k \neq 0$, 于是一方面

$$k^{-1}(k\alpha) = k^{-1}0 = 0.$$

而另一方面

$$k^{-1}(k\alpha) = (k^{-1}k)\alpha = 1\alpha = \alpha.$$

于是

$$\alpha = 0.$$

证毕