§3.6　空间直线与点的相关位置

空间直线与点的相关位置有着两种情况，即点在直线上与点不在直线上，点在直线上的条件是点的坐标满足直线的方程．当点不在直线上时，求点到直线的距离。

1

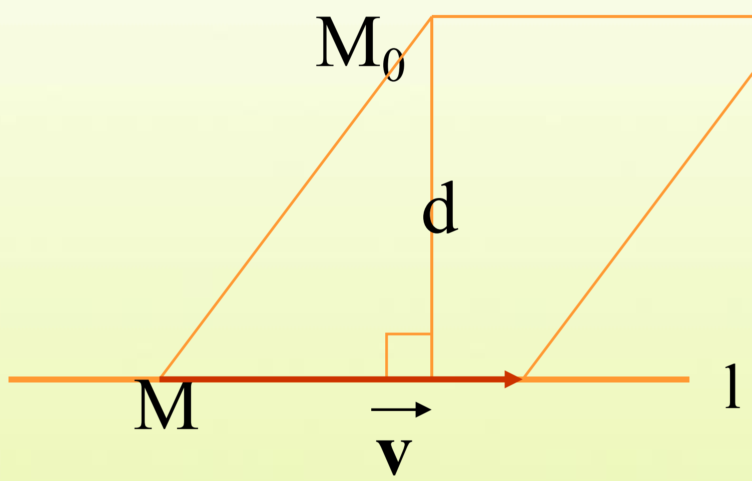
定义3.6.1 一点与空间直线上的点之间的最短距离叫做该点与空间直线间的距离。

在空间直角坐标系下,给定一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$与直线:

$$l:\quad \frac{x-x_1}{X}=\frac{y-y_1}{Y}=\frac{z-z_1}{Z}$$

这里M(x,y,z)为直线l上的一点,$\vec{v}=\{X,Y,Z\}$为直线l的方向矢量

我们考虑以 $\vec{\mathbf{V}}$ 和矢量 $\overrightarrow{M\ M_0}$ 为两边构成的平行四边形,这个平行四边形的面积等于 $\left|\vec{v}\times\overrightarrow{M\ M_0}\right|$,显然点 **Mo** 到 **L** 的距离 **d** 就是这平行四边形的对应于以 $|\vec{V}|$ 为底的高



因此我们有

$$d=\frac{\left|v\times\overrightarrow{M\ M_0}\right|}{|V|}$$

$$=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_0-y_1 & z_0-z_1 \\ Y & Z \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z_0-z_1 & x_0-x_1 \\ Z & X \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_0-x_1 & y_0-y_1 \\ X & Y \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$$

例1 求点(5,4,2)到直线 $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z-1}{-1}$ 的距离d.

解 $P_0(5,4,2)$, 取$P_1(-1,3,1)$, $\vec{s}=\{2,3,-1\}$

� $\overrightarrow{P_1P_0}=\{6,1,1\}$, $|\vec{s}|=\sqrt{2^2+3^2+(-1)^2}=\sqrt{14}$,

� $$\overrightarrow{P_1P_0}\times\vec{s}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 6 & 1 & 1\\ 2 & 3 & -1\end{vmatrix}=\{-4,8,16\}$$

$$\therefore\quad d=\frac{\left|\overrightarrow{P_1P_0}\times\vec{s}\right|}{|\vec{s}|}=\frac{\sqrt{(-4)^2+8^2+16^2}}{\sqrt{14}}=2\sqrt{6}.$$

Contents

例2 求点 $P(2,3,-1)$到直线 $l:\begin{cases}2x-2y+z+3=0\\3x-2y+2z+17=0\end{cases}$ 的距离。