《解析几何》
—Chapter 1

§1.10三向量的双重向量积

Contents

一、双重向量积的概念

- 定义1

给定空间三向量，先作其中两个向量的向量积，再作所得向量与第三个向量的向量积，那么最后的结果仍然是一个向量，叫做所给三向量的双重向量积。

例如 $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}$

就是三向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 的一个双重向量积.

二、双重向量积的性质

- 双重向量积的几何关系

$$\left.\begin{array}{l} (\vec{a}\times\vec{b})\perp\vec{a} \quad , \ (\vec{a}\times\vec{b})\perp\vec{b} \\ (\vec{a}\times\vec{b})\perp\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c} \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ 与 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 共面

二、双重向量积的性质

- **定理1** $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}$
- **结论** $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}?\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$

在一般情况下，$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ 与 $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ 是两个不同的向量，$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}\neq\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$，因此，向量积不满足结合律。

- **记忆规律**

三向量的双重向量积等于中间的向量与其余两向量的数量积的乘积减去括号中另一个向量与其余两向量的数量积的乘积。

二、双重向量积的性质

- 定理

（拉格朗日恒等式（Joseph-louis Lagrange,1736-1813, 法国人））对任意4个向量，有

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\left(\overrightarrow{a'}\times\overrightarrow{b'}\right)=\begin{vmatrix}\vec{a}\cdot\overrightarrow{a'} & \vec{a}\cdot\overrightarrow{b'}\\ \vec{b}\cdot\overrightarrow{a'} & \vec{b}\cdot\overrightarrow{b'}\end{vmatrix}$$

拉格朗日恒等式的一个特殊情况（1.8—7）

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2\vec{b}^2-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2$$

例题

- 例1 试证雅可比（Jacobi）恒等式

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}+\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\times\vec{a}+\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)\times\vec{b}=\vec{0}$$

- 例2 证明

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}'\times\vec{b}'\right)=\left(\vec{a}\vec{b}\vec{b}'\right)\vec{a}'-\left(\vec{a}\vec{b}\vec{a}'\right)\vec{b}'$$

$$=\left(\vec{a}\vec{a}'\vec{b}'\right)\vec{b}-\left(\vec{b}\vec{a}'\vec{b}'\right)\vec{a}$$

- 作业

P_{62}　1，　5