

第二节 排列

主要内容

- 定义
- 性质

一、定义

定义1 由 $1, 2, \dots, n$ 组成的一个有序数组称为一个
 n 级排列.

例如, 2431是一个 4 级排列, 45231是一个 5 级排列.

问: 一个 n 级排列的总个数是多少个?

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1$$

$$1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n = n!. \quad \text{读为 } n \text{ 阶乘.}$$

例如： $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$, $5! = 120$.

$n!$ 随着 n 的增大迅速地增大. 例如, $10! = 3628800$.

问： $12 \dots n$ 这个 n 级排列，具有什么特征？

定义 2 在一个排列中，如果一对数的前后位置与大小顺序相反，即前面的数大于后面的数，那么它们就称为一个**逆序**，一个排列中逆序的总数就称为这个排列的**逆序数**.

排列 $j_1 j_2 \dots j_n$ 的逆序数记为 $\tau(j_1 j_2 \dots j_n)$.

定义 3 逆序数为奇数的排列称为**奇排列**,
逆序数为偶数的排列称为**偶排列**.

例1 求排列32541的逆序数?并判断是奇排列、偶排列。
把一个排列中某两个数的位置互换,而其余的数不动,
就得到另一个排列. 这样一个变换称为一个**对换**.
例如, 经过1, 2对换, 排列2431就变成了1432,
排列2134就变成了1234.

二、性质

定理 1 对换改变排列的奇偶性.

证明 先证相邻对换的情形.

设排列为 $a_1 \dots a_l a b b_1 \dots b_m$, 对换 a 与 b , 则

排列变为 $a_1 \dots a_l b a b_1 \dots b_m$. 显然, 排列 $a_1 \dots a_l$ 和

$b_1 \dots b_m$ 经对换后的逆序数并不改变, 而 a, b 这

两个元素的逆序数改变为:

当 $a < b$ 时, 经对换后 a 的逆序数增加 1 而 b 的逆序数不变;

当 $a > b$ 时, 经对换后 a 的逆序数不变而 b 的逆数减少 1.

所以排列 $a_1 \dots a_l a b b_1 \dots b_m$ 与排列 $a_1 \dots a_l b a b_1 \dots b_m$ 的

奇偶性不同.

再证一般对换的情形.

设排列为 $a_1 \dots a_l a b_1 \dots b_m b c_1 \dots c_n$, 把它作 m 次相邻对换, 调成 $a_1 \dots a_l a b b_1 \dots b_m c_1 \dots c_n$, 再作 $m+1$ 次相邻对换, 调成 $a_1 \dots a_l b b_1 \dots b_m a c_1 \dots c_n$.
之, 经 $2m+1$ 次相邻对换, 排列

$$a_1 \dots a_l a b_1 \dots b_m b c_1 \dots c_n$$

调换成排列

$$a_1 \dots a_l b b_1 \dots b_m a c_1 \dots c_n,$$

所以这两个排列的奇偶性相反.

证毕

推论 在全部 n 阶排列中，奇、偶排列的个数相等，各有 $n!/2$ 个。

证明 假设在全部 n 阶排列中，奇、偶排列的个数分别为 s ， t 。

将 s 个奇排列的前2个数字进行对换，得到 s 个不同的偶排列，因此， s 小于等于 t 。

同理可得， t 小于等于 s 。

因此， $s=t= n!/2$ 。

定理 2 任意一个 n 级排列与排列 $12 \dots n$ 都可经过一系列对换互变，并且所作对换的个数与这个排列有相同的奇偶性。

证明 我们对排列的级数 n 作数学归纳法，现在来证任意一个 n 级排列都可经过一系列对换变成 $12 \dots n$.

1 级排列只有一个，结论显然成立。

假设结论对 $n - 1$ 级排列已经成立，现在来证对 n 级排列的情形结论也成立。

小结和作业

1. 排列逆序数如何计算？逆序数的奇偶判断的依据？
2. 排列有哪些性质？
3. 作业见学习通.