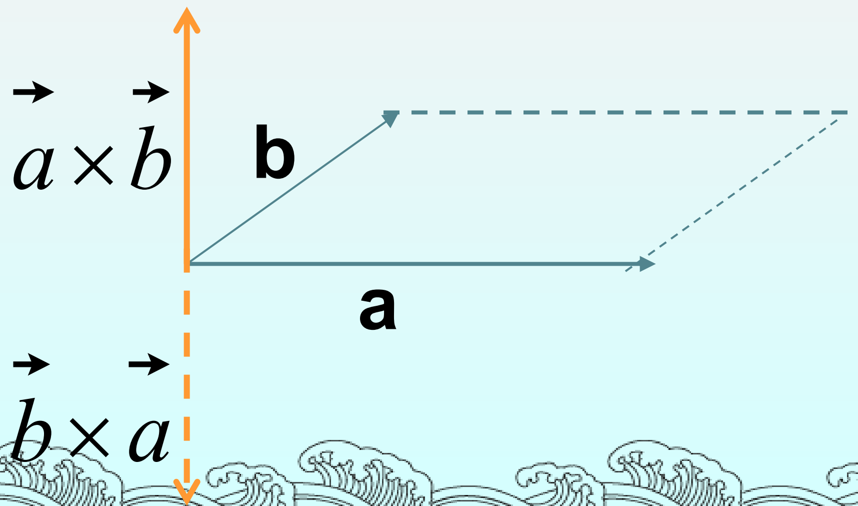
1.8两向量的向量积

定义1.8.1 两向量a与b的向量积是一个向量,记作 $\vec{a}\times\vec{b}$

它的模是

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\angle(\mathbf{a},\mathbf{b}) \quad (1.8\text{-}1)$$

它的方向与a,b都垂直,且按a,b, $\vec{a}\times\vec{b}$ 构成右手系.



因为平行四边形的面积等于它的两邻边长的积乘以夹角的正弦,所以由(1.8-1)有

定理1.8.1 两不共线向量a,b的向量积的模,等于以a,b为边所构成的平行四边形的面积.

定理1.8.2 两向量a,b共线的充要条件是$\vec{a}\times\vec{b}$ =0

证明: 当**a,b** 共线时,则 $|\vec{a}\times\vec{b}|$**=**0 于是 $\vec{a}\times\vec{b}$ **=0**

反之，当 $\vec{a}\times\vec{b}$ **=0** 时，由定义，有**a=0**或者**b=0**

或者**a // b**，所以不管怎能样，总有**a // b**

定理1.8.3 两向量a,b的向量积满足反交换律 ，即

$$\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a} \quad （1.8\text{-}2） \quad （证明略）$$

定理1.8.4 两向量a,b的向量积关于数因子满足结合律

即

$$\lambda(\vec{a}\times\vec{b}) = (\lambda\vec{a})\times\vec{b} = \vec{a}\times(\lambda\vec{b}) \quad (1.8\text{-}3)$$

证明：当λ=0或者a,b共线时，结论显然成立。

当 λ ≠ 0或者a,b不共线时，因为

$$|\lambda(\vec{a}\times\vec{b})| = |\lambda||a||b|\sin\angle(a,b)$$

$$|(\lambda\vec{a})\times\vec{b}| = |\lambda||a||b|\sin\angle(a,b)$$

$$\left|\vec{a}\times(\lambda\vec{b})\right|=\lambda|a||b|\sin\angle(a,b)A$$

即它们的模相等,且λ >0 时,它们的方向与 $\vec{a}\times\vec{b}$同向,

λ <0时与 $\vec{a}\times\vec{b}$反向.因此三个矢量方向相同.

从而定理成立

推论：当λ, μ为任意实数时，有：（λa）×（μb)= λμ(a×b)

定理1.8.5　向量积满足分配律.即

$$(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c} \qquad (1.8\text{-}5)$$

(证明略)

推论 $$(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$$

在直角坐标系下,用坐标的分量表示两向量的向量积

定理1.8.6 在直角坐标系下,如果

$$\mathbf{a}=X_1\mathbf{i}+Y_1\mathbf{J}+Z_1\mathbf{k},\quad \mathbf{b}=X_2\mathbf{i}+Y_2\mathbf{j}+Z_2\mathbf{k},$$

则有

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}\mathbf{i}+\begin{vmatrix} Z_1 & X_1 \\ Z_2 & X_2 \end{vmatrix}\mathbf{j}+\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}\mathbf{k} \quad (1.8\text{-}8)$$

证明：因为 $\vec{a}\times\vec{b}=(X_1\mathbf{i}+y_1\mathbf{j}+z_1\mathbf{k})\times(X_2\mathbf{i}+Y_2\mathbf{j}+Z_2\mathbf{k})$

$$= X_1X_2(\mathbf{i}\times\mathbf{i})+X_1Y_2(\mathbf{i}\times\mathbf{j})+X_1Z_2(\mathbf{i}\times\mathbf{k})+Y_1X_2(\mathbf{j}\times\mathbf{i})+$$

$$Y_1Y_2(\mathbf{j}\times\mathbf{j})+Y_1Z_2(\mathbf{j}\times\mathbf{k})+Z_1X_2(\mathbf{k}\times\mathbf{i})+Z_1Y_2(\mathbf{k}\times\mathbf{j})+$$

$$Z_1Z_2(\mathbf{k}\times\mathbf{k})$$

由于

$i \times i = 0 \quad j \times j = 0 \quad k \times k = 0 \quad i \times j = k \quad j \times k = i \quad k \times i = j$

$j \times i = -k \quad k \times j = -i \quad i \times k = -j$

所以上式= $(Y_1Z_2-Y_2Z_1)i+(Z_1X_1-Z_2X_1)j+(X_1Y_2-X_2Y_1)k$

即定理成立.