文山學院
WENSHAN UNIVERSITY

第七节　多项式函数

主要内容

- 定义
- 性质

不忘初心，牢记使命

解 方程 $\left.\begin{aligned}x&=\alpha\\ f(\alpha)&=0\end{aligned}\right\}$

多项式 $=0$

函数 $\left.\begin{aligned}x&=\alpha\\ f(\alpha)&=\beta\end{aligned}\right\}$

文山学院 WENSHAN UNIVERSITY

一、定义

定义（多项式函数）

任意给定$f(x)\in P[x]$，可以得到P到自身的一个映射$f:\alpha\mapsto f(\alpha)$，$\forall\alpha\in P$.
这个映射称为由多项式$f(x)$诱导的**多项式函数**，也称为P上的**一元多项式函数**.

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\in P[x]$$

$$\downarrow$$

$$f:\ P\longrightarrow P$$

$$\alpha\ \longmapsto f(\alpha)=a_n\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+\cdots+a_1\alpha+a_0$$

因为 x 在与数域 P 中的数进行运算时适合与数的运算相同的运算规律，所以容易得：

如果 $h_1(x)=f(x)+g(x)$,

$h_2(x)=f(x)\,g(x)$,

那么

$h_1(\alpha)=f(\alpha)+g(\alpha)$,

$h_2(\alpha)=f(\alpha)\,g(\alpha)$,

二、性质

定理 7 (余数定理) 用一次多项式 $x-\alpha$ 去除多项式 $f(x)$，所得的余式是一个常数，这个常数等于函数值 $f(\alpha)$.

若 $f(x)$ 在$x=\alpha$ 时函数值 $f(\alpha)=0$,则α 称为 $f(x)$ 的一个**根**或**零点**.

推论 α 是 $f(x)$ 的根的**充分必要条件** $(x-\alpha) \mid f(x)$.

如果$x-\alpha$是$f(x)$的k重因式，α称为$f(x)$的k**重根**.

$k=1$时，α称为**单根**；$k>1$时，α称为**重根**.

例 检验$x=2$是不是$f(x)=x^6-6x^5+11x^4-x^3-18x^2+20x-8$的根，若是，它是几重根。

定理 8 $P[x]$ 中 n 次多项式 ($n\geq 0$) 在数域 P 中的根不可能多于 n 个，重根按重数计算.

从上面得出，每个多项式函数都可以由一个多项式来定义.

不同的多项式会不会定义出相同的函数呢？

是否可能有 $f(x) \neq g(x)$，

而对于 P 中所有的数 α 都有 $f(\alpha) = g(\alpha)$？

由定理8不难对这个问题给出一个否定的回答.

定理 9 如果多项式 $f(x)$，$g(x)$ 的次数都不超过 n，而它们对 $n+1$ 个不同的数 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}$ 有相同的值,即

$$f(\alpha_i) = g(\alpha_i) \quad i = 1, 2, \ldots, n+1,$$

那么 $f(x) = g(x)$.

因为数域 P 中有无穷多个数，所以定理9说明了，

不同的多项式定义的函数也不相同.

若两个多项式定义相同的函数，就称为恒等，上面的结论表明，多项式的恒等与多项式相等实际上是一致的.

换句话说，数域上的多项式既可以作为形式表达式来处理，也可以作为函数来处理.但是应该指出,考虑到今后的应用与推广，多项式看成形式表达式要方便些.

例

证明：如果$(x-1)\mid f(x^n)$，那么$(x^n-1)\mid f(x^n)$.

证明 $(x-1)\mid f(x^n)$ $\Rightarrow$ 1是$f(x^n)$的根 $\Rightarrow$ $f(1^n)=f(1)=0$

$\Rightarrow$ 1是$f(x)$的根 $\Rightarrow$ $(x-1)\mid f(x)$ $\Rightarrow$ $f(x)=(x-1)h(x)$

$\Rightarrow$ $f(x^n)=(x^n-1)h(x^n)$ $\Rightarrow$ $(x^n-1)\mid f(x^n)$

小结和作业

1.请叙述余数定理以及α是$f(x)$的根的充要条件？

2.请叙述定理8的内容？谈谈定理9的意义何在？

3.作业见学习通.