第七节

分块乘法的初等变换及应用举例

主要内容

- 分块初等矩阵
- 应用举例

一、分块初等矩阵

1. 定义

定义 把单位矩阵 E 如下进行分块：

$$E=\begin{pmatrix} E_m & O \\ O & E_n \end{pmatrix}$$

对它进行一次初等行（列）变换得到的矩阵称为

分块初等矩阵.

分块初等矩阵有以下三类：

1) 分块对换矩阵　对换两行(列)所得到

$$\begin{pmatrix} O & E_n \\ E_m & O \end{pmatrix},$$

2) 分块倍乘矩阵　某一行(列)左乘(右乘)一个

矩阵 P 所得到 $$\begin{pmatrix} P & O \\ O & E_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E_m & O \\ O & P \end{pmatrix},$$

3) 分块倍加矩阵　一行(列)加上另一行(列)的

P (矩阵)倍数所得到 $$\begin{pmatrix} E_m & P \\ O & E_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E_m & O \\ P & E_n \end{pmatrix}.$$

2. 分块初等矩阵的性质

和初等矩阵与初等变换的关系一样，分块初等矩阵有与初等矩阵类似的性质：

用分块初等矩阵左乘分块矩阵 A, 在保证可乘的情况下，其作用相当于对分块矩阵 A 进行一次相应的初等行变换；用分块初等矩阵右乘分块矩阵 A，其作用相当于对分块矩阵 A 进行一次相应的初等列变换.

例如，设有如下分块矩阵 $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$，

分别用三种分块初等矩阵左乘它，其结果如下：

$$\begin{pmatrix} O & E_n \\ E_m & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & D \\ A & B \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} P & O \\ O & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} PA & PB \\ C & D \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} E_m & O \\ P & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C+PA & D+PB \end{pmatrix};$$

在 $\begin{pmatrix} E_m & O \\ P & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C+PA & D+PB \end{pmatrix}$ 中，

适当先择 P，可使 $C + PA = O$.

例如 A 可逆时，选 $P = - CA^{-1}$，则 $C + PA = O$.

于是上式右端成为

$$\begin{pmatrix} A & B \\ O & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}.$$

这种形状的矩阵在求行列式、逆矩阵和解决其他问题时是比较方便的，因此这种运算非常有用.

$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$，分别用三种分块初等矩阵右乘它，其结果如下：

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O & E_n \\ E_m & O \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B & A \\ D & C \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P & O \\ O & E_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} AP & B \\ CP & D \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_m & O \\ P & E_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A+BP & B \\ C+DP & D \end{pmatrix}.$$

二、应用举例

例 1 设

$$T=\begin{pmatrix} A & O \\ C & D \end{pmatrix},$$

其中 A，D 可逆，求 T^{-1}.

解 因为

$$\begin{pmatrix} E_m & O \\ -CA^{-1} & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & O \\ C & D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & O \\ O & D \end{pmatrix}$$

且
$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & D^{-1} \end{pmatrix},$$

所以
$$T^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & D^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_m & O \\ -CA^{-1} & E_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -D^{-1}CA^{-1} & D^{-1} \end{pmatrix}.$$

例 2 设

$$T_1=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

其中T_1, D可逆，试证$(A-BD^{-1}C)^{-1}$存在，并求T_1^{-1}.

证明 因为

$$\begin{pmatrix} E_m & -BD^{-1} \\ O & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} A-BD^{-1}C & O \\ C & D \end{pmatrix},$$

因为 T_1 可逆，对它进行初等变换后仍可逆，即

$$\begin{pmatrix} A-BD^{-1}C & O \\ C & D \end{pmatrix}$$

可逆，故 $(A-BD^{-1}C)^{-1}$ 存在.

由 $$\begin{pmatrix} E_m & -BD^{-1} \\ O & E_n \end{pmatrix} T_1 = \begin{pmatrix} A-BD^{-1}C & O \\ C & D \end{pmatrix}$$

解得

$$T_1^{-1} = \begin{pmatrix} A-BD^{-1}C & O \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} E_m & -BD^{-1} \\ O & E_n \end{pmatrix},$$

再由例 1，得

$$T_1^{-1}=\begin{pmatrix} A-BD^{-1}C & O \\ C & D \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} E_m & -BD^{-1} \\ O & E_n \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} (A-BD^{-1}C)^{-1} & O \\ -D^{-1}C(A-BD^{-1}C)^{-1} & D^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_m & -BD^{-1} \\ O & E_n \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} (A-BD^{-1}C)^{-1} & -(A-BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} \\ -D^{-1}C(A-BD^{-1}C)^{-1} & D^{-1}C(A-BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1}+D^{-1} \end{pmatrix}$$

练一练

求矩阵A的逆矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

例 3 证明行列式的乘积公式 $|AB|=|A||B|$.

证明 作

$$\begin{pmatrix} E & A \\ O & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & O \\ -E & B \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} O & AB \\ -E & B \end{pmatrix}.$$

设 A，B 为 $n\times n$ 矩阵，作

$$P_{ij}=\begin{pmatrix} E_n & E_{ij} \\ O & E_n \end{pmatrix},$$

$i,j=1,2,\dots,n$，这里 E_{ij} 为 $n\times n$ 矩阵，除了第 i 行第 j 列元素为 a_{ij} 外，其他元素皆为零．则由初

等矩阵与初等变换的关系，易得下列关系式

$$P_{11}P_{12}\cdots P_{1n}\cdots P_{n1}\cdots P_{nn}\begin{pmatrix} E_n & O \\ O & E_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E_n & A \\ O & E_n \end{pmatrix}$$

又由 P_{ij} 所对应的初等变换是某行加上另外一行的倍数，它不改变行列式的值，故

$$\left|\begin{pmatrix} E & A \\ O & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & O \\ -E & B \end{pmatrix}\right|=\left|P_{11}\cdots P_{nn}\begin{pmatrix} A & O \\ -E & B \end{pmatrix}\right|$$

$$=\begin{vmatrix} A & O \\ -E & B \end{vmatrix}=|A||B|.$$ **(p82,eg3)**

又因为矩阵 $\begin{pmatrix} O & AB \\ -E & B \end{pmatrix}$ 作 n 次列对换可变成矩阵 $\begin{pmatrix} AB & O \\ B & -E \end{pmatrix}$，即

$$\begin{pmatrix} O & AB \\ -E & B \end{pmatrix} \xrightarrow[j=1,2,\ldots,n]{\text{第 } j \text{ 列与第 } n+j \text{ 列对换}} \begin{pmatrix} AB & O \\ B & -E \end{pmatrix},$$

所以

$$\begin{vmatrix} O & AB \\ -E & B \end{vmatrix} = (-1)^n \begin{vmatrix} AB & O \\ B & -E \end{vmatrix} = (-1)^n |AB||-E| = |AB|.$$

这就证明了 $|AB| = |A||B|$.

证毕

例 4 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，且

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \neq 0,\ 1\leq k\leq n,$$

则有下三角形矩阵 $B_{n\times n}$ 使

BA = 上三角形矩阵.

证明 对 n 作归纳法. 当 $n=1$ 时，一阶矩阵既是上三角形又是下三角形，故命题成立.

设对 $n-1$ 命题为真，设

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{pmatrix},$$

它仍满足命题中所设的条件．由归纳法假设，有下三角形矩阵 $(B_1)_{(n-1)\times(n-1)}$ 满足

$$B_1 A_1 = \text{上三角形矩阵}.$$

对 A 作如下分块： $A=\begin{pmatrix} A_1 & \beta \\ \alpha & a_{nn} \end{pmatrix}$，则

$$\begin{pmatrix} E & O \\ -\alpha A_1^{-1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & \beta \\ \alpha & a_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_1 & \beta \\ O & -\alpha A_1^{-1}\beta+a_{nn} \end{pmatrix}.$$

再作

$$\begin{pmatrix} B_1 & O \\ O & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & \beta \\ O & -\alpha A_1^{-1}\beta+a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} B_1A_1 & B_1\beta \\ O & -\alpha A_1^{-1}\beta+a_{nn} \end{pmatrix}.$$

这时矩阵已成为上三角形了．将两次乘法结合起来就得到：

$$B=\begin{pmatrix} B_1 & O \\ O & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & O \\ -\alpha A_1^{-1} & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B & O \\ -\alpha A_1^{-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

此即为所要求的下三角矩阵.

证毕

小结和作业

1.分块初等矩阵有哪几类？在一个矩阵左边和右边乘分块初等矩阵的作用分别是什么？

2.如何求分块的下三角矩阵的逆矩阵？

3.作业见学习通.