第二节　标准正交基

主要内容

- 定义
- 标准正交基的求法
- 举例
- 正交矩阵

一、定义

1. 正交向量组的定义

定义 5 欧氏空间 V 中一组非零的向量，如果它们两两正交，就称为一**正交向量组**.

应该指出，按定义，由单个非零向量所成的向量组也是正交向量组. 当然，以下讨论的正交向量组都是非空的.

2. 正交向量组的性质

性质 正交向量组是线性无关的.

证明 设 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 是一正交向量组，

$k_1, k_2, \ldots, k_m$ 是 m 个实数，且有

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_m\alpha_m = 0 .$$

用 α_i 与等式两边作内积，得

$$k_i(\alpha_i, \alpha_i) = 0 .$$

由 $\alpha_i \neq 0$，有 $(\alpha_i, \alpha_i) > 0$，从而

$$k_i = 0\ (i = 1, 2, \ldots, m) .$$

证毕

这个结果说明，在 n 维欧氏空间中，两两正交的非零向量不能超过 n 个. 这个事实的几何意义是清楚的. 例如，在平面上找不到三个两两垂直的非零向量；在空间中，找不到四个两两垂直的非零向量.

从解析几何中看到，直角坐标系在图形度量性质的讨论中有特殊的地位. 在欧氏空间中，情况是相仿的.

3. 正交基的定义

定义 6　在 n 维欧氏空间中，由 n 个向量组成的正交向量组称为**正交基**; 由单位向量组成的正交基称为**标准正交基**.

对一组正交基进行单位化就得到一组标准正交基.

4. 正交基的性质

性质 1 设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 是一组标准正交基，则

$$(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \qquad (1)$$

显然，(1) 式完全刻画了标准正交基的性质. 换句话说，一组基为标准正交基的充分必要条件是：它的度量矩阵为单位矩阵. 因为度量矩阵是正定的.

根据第五章关于正定二次型的结果，正定矩阵合同于单位矩阵。这说明在 n 维欧氏空间中存在一组基，它的度量矩阵是单位矩阵。由此可断言，在 n 维欧氏空间中，标准正交基是存在的。

性质 2 设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 是一组标准正交基，向量 α 在该基下的坐标为 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$，即

$$\alpha = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \ldots + x_n\varepsilon_n,$$

则

$$x_i = (\varepsilon_i, \alpha) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

证明 $(\varepsilon_i, \alpha) = (\varepsilon_i, x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \ldots + x_n\varepsilon_n)$

$$= (\varepsilon_i, x_1\varepsilon_1) + \ldots + (\varepsilon_i, x_{i-1}\varepsilon_{i-1}) + (\varepsilon_i, x_i\varepsilon_i) +$$

$$+ (\varepsilon_i, x_{i+1}\varepsilon_{i+1}) + \ldots + (\varepsilon_i, x_n\varepsilon_n)$$

$$= x_1(\varepsilon_i, \varepsilon_1) + \ldots + x_{i-1}(\varepsilon_i, \varepsilon_{i-1}) + x_i(\varepsilon_i, \varepsilon_i) +$$

$$+ x_{i+1}(\varepsilon_i, \varepsilon_{i+1}) + \ldots + x_n(\varepsilon_i, \varepsilon_n)$$

$$= x_i(\varepsilon_i, \varepsilon_i)$$

$$= x_i .$$

证毕

性质 3 设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 是一组标准正交基，且

$$\alpha = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \ldots + x_n\varepsilon_n,$$

$$\beta = y_1\varepsilon_1 + y_2\varepsilon_2 + \ldots + y_n\varepsilon_n,$$

那么

$$(\alpha, \beta) = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n = X^{\mathrm{T}}Y. \quad (2)$$

这个表达式正是几何中向量的内积在直角坐标系中的坐标表达式的推广.

应该指出，内积的表达式 (2)，对于任一组标准正交基都是一样的．这说明了，所有的标准正交基在欧氏空间中有相同的地位．在下一节，这一点将得到进一步的说明．

下面将结合内积的特点来讨论标准正交基的求法．

二、标准正交基的求法

定理1 n维欧氏空间中任一个正交向量组都能扩充成一组正交基.

证明 设$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$是一正交向量组，我们对$n-m$作数学归纳法.

当$n-m=0$时，$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$就是一组正交基.

假设$n-m=k$时定理成立，也就是说，可以找到向量$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$，使得

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$成为一组正交基.

现在来看 $n-m=k+1$ 的情形. 因为 $m<n$，

所以一定有向量 β 不能被$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$线性表出，

作向量

$$\alpha_{m+1}=\beta-k_1\alpha_1-k_2\alpha_2-\ldots-k_m\alpha_m,$$

这里 $k_1, k_2, \ldots, k_m$ 是待定的系数. 用 α_i 与 α_{m+1} 作

内积，得

$$(\alpha_i, \alpha_{m+1})=(\beta, \alpha_i)-k_i(\alpha_i, \alpha_i)\ \ (i=1, 2, \ldots, m).$$

取 $$k_i = \frac{(\beta,\alpha_i)}{(\alpha_i,\alpha_i)} \quad (i = 1,2,\cdots,m).$$

有

$$(\alpha_i\,,\,\alpha_{m+1}) = 0 \quad (\,i = 1,\,2,\,\ldots\,,\,m).$$

由 β 的选择可知， $\alpha_{m+1} \neq 0$. 因此

$$\alpha_1\,,\,\alpha_2\,,\,\ldots\,,\,\alpha_m\,,\,\alpha_{m+1}$$

是一正交向量组，根据归纳法假定， $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$, α_{m+1} 可以扩充成一正交基.

证毕

应该注意，定理的证明实际上也就给出了一个具体的扩充正交向量组的方法.若从任一个非零向量出发，按证明中的步骤逐个地扩充，最后就得到一组正交基.再单位化，就得到一组标准正交基.

在求欧氏空间的正交基时，常常是已经有了空间的一组基.对于这种情形，有下面的结果：

定理 2 对于 n 维欧氏空间中任意一组基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$，都可以找到一组标准正交基 $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$，使

$$L(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_i) = L(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_i), i = 1,2,\ldots,n.$$

证明 设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 是一组基，逐个地求出向量 $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$.

首先，可取 $\eta_1 = \dfrac{1}{|\varepsilon_1|}\varepsilon_1$. 一般地，假定已经求出 $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$，它们是单位正交的，具有性质

$$L(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_i) = L(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_i),\ i = 1,2,\ldots,m.$$

下一步求η_{m+1}.

因为

$$L(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m) = L(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m),$$

所以ε_{m+1}不能被$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$线性表出. 按定理 1 证明中的方法，作向量

$$\xi_{m+1} = \varepsilon_{m+1} - \sum_{i=1}^{m} (\varepsilon_{m+1}, \eta_i)\eta_i .$$

显然 $\xi_{m+1} \neq 0$，且 $(\xi_{m+1}, \eta_i) = 0$， $i = 1, 2, \ldots, m$.

令

$$\eta_{m+1} = \frac{\xi_{m+1}}{|\xi_{m+1}|}.$$

则 $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m, \eta_{m+1}$ 就是一单位正交向量组.

同时

$$L(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{m+1}) = L(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{m+1}).$$

由归纳法原理，定理 2 得证.

证毕

应该指出，定理中的要求

$$L(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_i) = L(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_i), i = 1,2,\ldots,n.$$

就相当于由基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 到基 $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ 的过渡矩阵是上三角形的.

定理 2 中把一组线性无关的向量变成一单位正交向量组的方法称为**施密特(Schimidt)正交化过程**.

三、举例

例 1 设

$$a_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},a_2=\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix},a_3=\begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix},$$

试用施密特正交化过程把这组向量变成单位正交的向量组；并解释施密特正交化过程的几何意义.

解 取 $b_1 = a_1$；

$$b_2 = a_2 - \frac{(a_2,b_1)}{(b_1,b_1)} b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{5}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$b_3 = a_3 - \frac{(a_3,b_1)}{(b_1,b_1)} b_1 - \frac{(a_3,b_2)}{(b_2,b_2)} b_2$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{5}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

再把它们单位化，取

$$e_1=\frac{b_1}{|b_1|}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},\qquad e_2=\frac{b_2}{|b_2|}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix},$$

$$e_3=\frac{b_3}{|b_3|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

则 e_1,e_2,e_3 即为所求.

例 1 中各向量如图 9-1 所示. 用解析几何的术语解释如下:

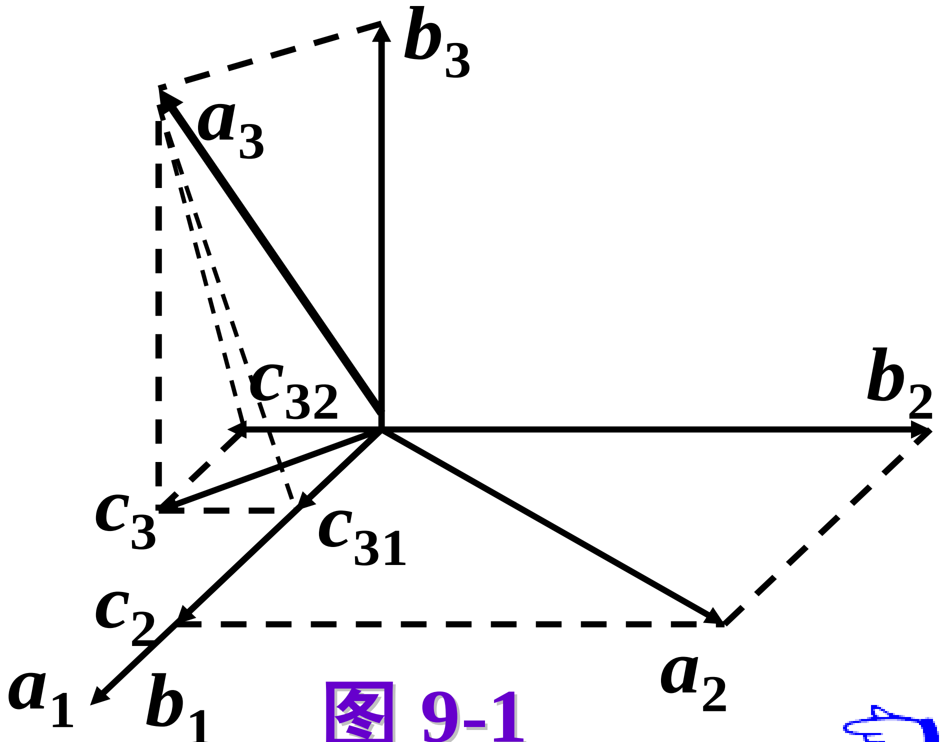

图 9-1

四、正交矩阵

设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 与 $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ 是欧氏空间 V 中的两组标准正交基，它们之间的过渡矩阵是 $A=(a_{ij})$，即

$$(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

因为 $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ 是标准正交基，所以

$$(\eta_i,\eta_j)=\begin{cases} 1, & \text{当 } i=j, \\ 0, & \text{当 } i\neq j. \end{cases} \qquad (4)$$

文山学院
WENSHAN UNIVERSITY

矩阵 A 的各列就是 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ 在标准正交基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 下的坐标，按公式 (3)，(4) 式可以表示为

$$a_{1i}a_{1j} + a_{2i}a_{2j} + \dots + a_{ni}a_{nj} = \begin{cases} 1, & \text{当 } i = j, \\ 0, & \text{当 } i \neq j. \end{cases} \tag{5}$$

(5) 式相当于一个矩阵的等式

$$A^{\mathrm{T}}A = E, \tag{6}$$

或者

$$A^{-1} = A^{\mathrm{T}}.$$

定义 7 n 级实数矩阵 A 称为**正交矩阵**，若 $A^{T}A=E$.

因此，以上分析表明，由标准正交基到标准正交基的过渡矩阵是正交矩阵；反过来，如果第一组基是标准正交基，同时过渡矩阵是正交矩阵，那么第二组基一定也是标准正交基.

最后，根据逆矩阵的性质，由

$$A^{\mathrm{T}}A=E$$

即得

$$AA^{\mathrm{T}}=E.$$

写出来就是

$$a_{i1}a_{j1}+a_{i2}a_{j2}+\ldots+a_{in}a_{jn}=\begin{cases}1, & \text{当 } i=j, \\ 0, & \text{当 } i\neq j.\end{cases} \qquad (7)$$

(5) 式是矩阵列与列之间的关系，(7) 式是行与行之间的关系，这两组关系是等价的.