第6章　线性空间

第3节 维数· 基与坐标

主要内容

- 问题的提出
- 线性空间的维数、基与坐标定义
- 例题巩固
- 小结、提出进一步的思考

问题Ⅰ

能否用线性空间的部分向量表示整个线性空间？

问题Ⅱ

线性空间非常抽象,能否使其向量与具体的数联系起来？若有这样的表示方法,则该表示方法唯一吗？

定义 设 V 是数域 P 上线性空间，V 中满足以下条件的向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 称为线性空间 V 的一组**基**：

(1) $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ **线性无关**；

(2) V 中任一向量都**可由** $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ **线性表示**.

线性空间 V 的一组基所含向量的个数称为 V 的**维数**，记为：$\dim V$.

例1 求线性空间 $P[x]_3$ 的一组基及其维数.

解: (1) $1, x, x^2$ 线性无关;

(2) $P[x]_3$ 中的任意一个多项式都可以由 $1, x, x^2$ 线性表示.

因此, $1, x, x^2$ 是线性空间 $P[x]_3$ 的一组基, 其维数等于3.

若$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$是线性空间V的一组基，则

$$V = \{\alpha \mid \alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n\}.$$

定理 若在线性空间V中取定一组基$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$，则V中任一向量$\alpha$可唯一地表示为

$$\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n.$$

数组$x_1, x_2, \cdots, x_n$称为向量α在基$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$下的坐标，记为$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

例2 已知线性空间 $P[x]_3$ 的多项式 $f(x)=2x^2-3x+1.$

(1) 求 $f(x)$ 在基 $x^2, x, 1$ 下的坐标？ （2，-3,1）

(2) 求 $f(x)$ 在基 $(x-1)^2$，$x-1, 1$ 下的坐标？ （2，1,0）

$$f(x)=2x^2-3x+1$$

$$=2(x-1)^2+4x-2+(-3x+1)$$

$$=2(x-1)^2+(x-1)+0\times 1$$

小 结

1. 线性空间中的一组向量，满足什么条件是基.

2. 线性空间每一个向量在给定的一组基下都可用其坐标来表示，且在同一组基下的一个向量的坐标的表示方法是唯一的.

思 考

1. 同一个向量在不同基下坐标之间关系如何表示?

2. 当线性空间的中有无限个线性无关的向量能否类似的方法定义基和维数的问题?

谢谢！