第六节　初等矩阵

主要内容

- 初等矩阵的定义
- 初等矩阵的性质
- 两个矩阵的等价关系
- 求逆矩阵的初等行变换法

一、初等矩阵的定义

定义 10 由单位矩阵 E 经过**一次**初等变换得到的矩阵称为**初等矩阵**.

三种初等变换对应着三种初等矩阵.

1. 对调两行或对调两列

把单位矩阵中第 i,j 两行对调 $(r_i \leftrightarrow r_j)$, 得初等矩阵, 记为 $P(i,j)$.

$$P(i,j)=\left(\begin{array}{ccccccccccc}
1 &&&&&&&&&& \\
& \ddots &&&&&&&&& \\
&& 1 &&&&&&&& \\
&&& 0 && \cdots && 1 &&& \\
&&&& 1 &&&&&& \\
&&& \vdots && \ddots && \vdots &&& \\
&&&&&& 1 &&&& \\
&&& 1 && \cdots && 0 &&& \\
&&&&&&&& 1 && \\
&&&&&&&&& \ddots & \\
&&&&&&&&&& 1
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \\ \\ \leftarrow \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \\
\end{array}$$

2. 以数 $c \neq 0$ 乘某行或某列

以数 $c \neq 0$ 乘单位矩阵 E 的第 i 行 $(r_i \times c)$，得初等矩阵，记为 $P(i(c))$.

$$P(i(c)) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & c & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

3. 以数 k 乘某行(列)加到另一行(列)上去

以 k 乘 E 的第 j 行加到第 i 行上 (kr_j+r_i)

[或以 k 乘 E 的第 i 列加到第 j 列上 (kc_i+c_j)], 得

初等矩阵, 记为 $P(i,j(k))$.

$$P(i, j(k)) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccccc} & & \text{第 } i \text{ 列} & & \text{第 } j \text{ 列} & & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \cdots & k & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \leftarrow \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

二、初等矩阵的性质

引理 设 A 是一个 $s \times n$ 矩阵，对 A 施行一次初等行变换，相当于在 A 的左边乘以相应的 s 级初等矩阵；对 A 施行一次初等列变换，相当于在 A 的右边乘以相应的 n 级初等矩阵.

证明 令 $B = (b_{ij})$ 为任意一个 $s \times s$ 矩阵，$A_1, A_2, \ldots, A_s$ 为 A 的行向量. 由矩阵的分块乘法，

$$BA=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{ss} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} b_{11}A_1+b_{12}A_2+\cdots+b_{1s}A_s \\ b_{21}A_1+b_{22}A_2+\cdots+b_{2s}A_s \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{i1}A_1+b_{i2}A_2+\cdots+b_{is}A_s \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{j1}A_1+b_{j2}A_2+\cdots+b_{js}A_s \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{s1}A_1+b_{s2}A_2+\cdots+b_{ss}A_s \end{pmatrix}$$

特别，令 $B = P(i, j)$，得

$$P(i,\ j)A = \begin{array}{c@{}l} \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_s \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \leftarrow \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

这相当于把 A 的 i 行与 j 行互换.

令 $B = P(i(c))$，得 $P(i(c))A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ cA_i \\ \vdots \\ A_s \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow 第 i 行 \\ \\ \\ \end{array}$

这相当于用 c 乘 A 的第 i 行.

令 $B = P(i, j(k))$，得

$$P(i, j(k))A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i + kA_j \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_s \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow 第 i 行 \\ \\ \leftarrow 第 j 行 \\ \\ \\ \end{array}$$

这相当于把 A 的 j 行的 k 倍加到 i 行.

问：1.初等矩阵是否可逆？并说明理由！

2.若可逆其逆矩阵等于什么？

推论 初等矩阵都是可逆的，且

1) $P(i,j)^{-1} = P(i,j)$;

2) $P(i(c))^{-1} = P(i(c^{-1}))$;

3) $P(i,j(k))^{-1} = P(i,j(-k))$.

三、两个矩阵的等价关系

1. 定义

定义 14 矩阵 A 与 B 称为**等价**，如果 B 可以由 A 经过一系列初等变换得到. 记为 $A \sim B$.

2. 等价关系的性质

(i) 反身性 $A \sim A$;

(ii) 对称性 若 $A \sim B$, 则 $B \sim A$;

(iii) 传递性 若 $A \sim B, B \sim C$, 则 $A \sim C$.

3. 行最简形矩阵和标准形矩阵

定义 一个行阶梯矩阵若满足

(1) 每个非零行的第一个非零元素为 1；

(2) 每个非零行的第一个非零元素所在列的其他元素全为零,则称之为**行最简形矩阵**.

定义 如果一个矩阵的左上角为单位矩阵,其他位置的元素都为零,则称这个矩阵为**标准形矩阵**.

矩阵的行阶梯形、行最简形、标准形的比较

以矩阵 B 为例

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3 & 1\\ 1 & 3 & 2 & 5\\ 2 & 2 & 6 & 7\\ 2 & 4 & 5 & 6\end{pmatrix}$$

矩阵 B 的行阶梯形、行最简形、标准形分别如下：

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

行阶梯形矩阵

其特点是：阶梯线以下的元素全是0，台阶数即为非零行数，竖线后面的第一个元素为非零元.

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -0.5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

行最简形矩阵

其特点是：非零行的第一个非零元为1，且这些非零元所在的列的其它元素都为0.

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

标准形矩阵

其特点是：左上角为一单位矩阵,其它位置上的元素全都为0.

文山學院 WENSHAN UNIVERSITY

4. 矩阵与其标准形的关系

定理 5 任意一个 $s \times n$ 矩阵 A 都与它的标准形等价，并且其标准形的主对角线上 1 的个数等于矩阵 A 的秩 (1 的个数可以是零).

证明 如果 $A = O$，那么它已经是标准形了. 以下无妨假设 $A \neq O$. 经过初等变换，A 一定可以变成一左上角元素不为零的矩阵.

当 $a_{11} \neq 0$ 时，第一行的 $-\frac{a_{i1}}{a_{11}}$ 倍加到第 i 行 $(i = 2, 3, \ldots, s)$，

第一列的 $-\frac{a_{1j}}{a_{11}}$ 倍加到第 j 列 $(j = 2, 3, \ldots, n)$.

然后，用 $\dfrac{1}{a_{11}}$ 乘第一行，A

就变成 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$.

A_1 是一个 $(s-1)\times(n-1)$ 的矩阵. 对 A_1 再重复以上的步骤. 这样下去就可得出所要的标准形.

显然, 标准形矩阵的秩就等于它主对角线上 1 的个数. 而初等变换不改变矩阵的秩, 所以 1 的个数也就是矩阵 A 的秩.

证毕

例 1 用初等变换把矩阵A化为 标准形, 其中

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

5. 两个矩阵等价的充要条件

矩阵 A，B 等价的充要条件是有初等矩阵 $P_1, \ldots, P_l$，$Q_1, \ldots, Q_t$ 使

$$A = P_1 P_2 \ldots P_l B Q_1 Q_2 \ldots Q_t . \qquad (1)$$

定理 6 n 级矩阵 A 为可逆的充要条件是它能表成一些初等矩阵的乘积：

$$A = Q_1 Q_2 \ldots Q_m . \qquad (2)$$

推论 1 两个 $s \times n$ 矩阵 A，B 等价的充要条件是存在可逆的 s 级矩阵 P 与可逆的 n 级矩阵 Q 使 $A = PBQ$.

设 A 为可逆矩阵，则由定理 6 知，存在初等矩阵

$Q_1, Q_2, \dots, Q_m$ 使 $A = Q_1 Q_2 \dots Q_m$,

把它改写一个，有

$$Q_m^{-1} Q_{m-1}^{-1} \dots Q_1^{-1} A = E .$$

因为初等矩阵的逆矩阵还是初等矩阵，同时在矩阵 A 的左边乘初等矩阵就相当于对 A 作初等行变换，

所以得以下推论

推论 2 可逆矩阵总可以经过一系列的初等行变换化成单位矩阵.

四、求逆矩阵的初等行变换法

当 $|A| \neq 0$ 时，由 $A = P_1 P_2 \ldots P_l$，有

$$P_l^{-1} P_{l-1}^{-1} \ldots P_1^{-1} A = E, \qquad \text{(i)}$$

及

$$P_l^{-1} P_{l-1}^{-1} \ldots P_1^{-1} E = A^{-1}. \qquad \text{(ii)}$$

(i) 式表明 A 经一系列初等行变换可变成 E.

(ii)式表明 E 经这同一系列初等行变换即变成 A^{-1}.

用分块矩阵形式，(i)、(ii) 两式可合并为：

$$P_l^{-1}P_{l-1}^{-1}\cdots P_1^{-1}(A \,\vdots\, E) = (E \,\vdots\, A^{-1}),$$

即对 $n \times 2n$ 矩阵 $(A \,\vdots\, E)$ 施行初等行变换，

当把 A 变成 E 时，原来的 E 就变成 A^{-1}.

利用初等行变换求逆矩阵的方法，还可用于求矩阵 $A^{-1}B$.

由

$$A^{-1}(A \,\vdots\, B) = (E \,\vdots\, A^{-1}B)$$

可知，若对矩阵 $(A \,\vdots\, B)$ 施行初等行变换，当把 A 变为 E 时，B 就变为 $A^{-1}B$.

例 2 设矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

用初等行变换法，判断 A 是否可逆？若可逆，求 A^{-1}.

参考答案

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

例 3 用初等行变换法解矩阵方程 $AX = B$,

其中 $$A=\begin{pmatrix}5 & 1 & -5\\ 3 & -3 & 2\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-8 & -5\\ 3 & 9\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

解

$$(A|B)=\begin{pmatrix}5 & 1 & -5 & -8 & -5\\ 3 & -3 & 2 & 3 & 9\\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5\\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6\end{pmatrix},$$

故 $$X=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 5\\ 3 & 6\end{pmatrix}.$$

小结和作业

1.请叙述初等矩阵与初等变换的关系?

2.一个矩阵的等价标准形和矩阵可逆的充要条件?

3.请叙述用初等变换的方法求一个方阵的逆矩阵.

4.作业见学习通.