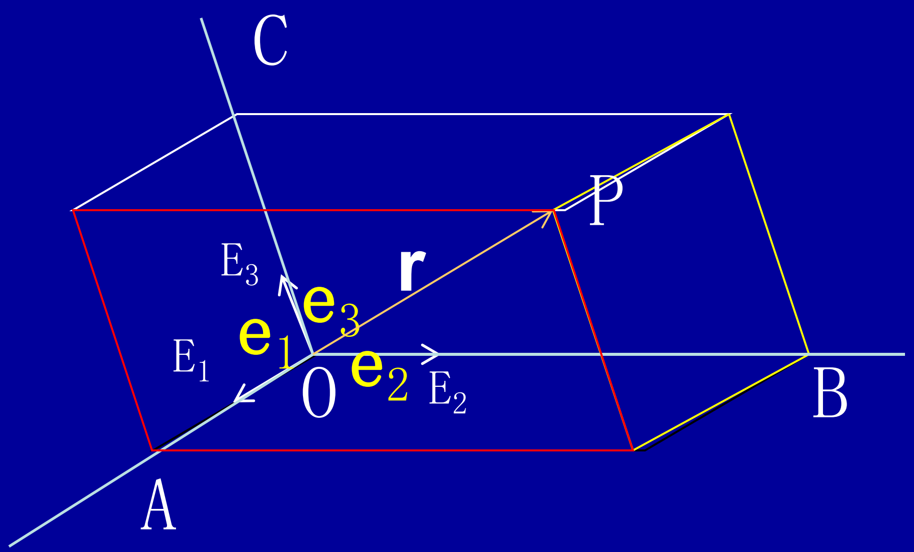
1.5标架与坐标

在空间任意取定O点,从O点引出三个不共面向量

$\overrightarrow{OE_1}=\mathbf{e}_1$ $\overrightarrow{OE_2}=\mathbf{e}_2$ $\overrightarrow{OE_3}=\mathbf{e}_3$

则由定理1.4.3知,空间任意向量**r**都可以分解成

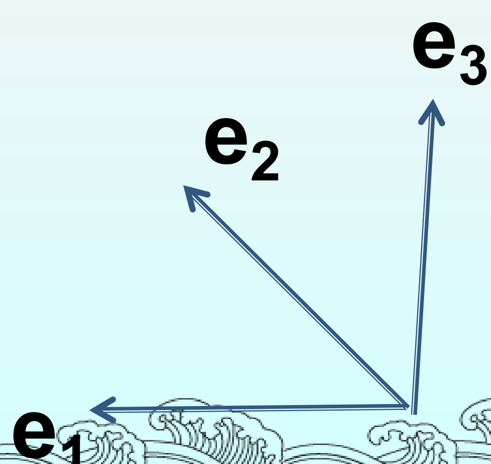
$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$的线性组合: $\mathbf{r}=x\mathbf{e}_1+y\mathbf{e}_2+z\mathbf{e}_3$ (1)



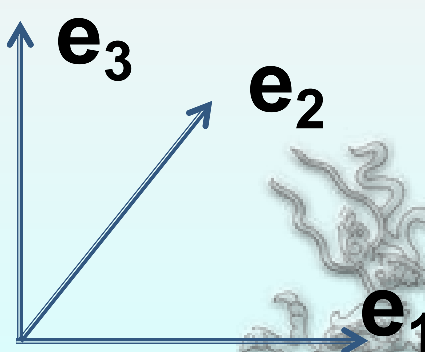
定义1.5.1　空间中的一个定点O，连同三个不共面的有序向量e_1, e_2, e_3的全体，叫做空间中的一个标架，记做$\{O; e_1, e_2, e_3\}$，如果e_1, e_2, e_3都是单位向量，则$\{O; e_1, e_2, e_3\}$叫做笛卡尔标架；e_1, e_2, e_3两两互相垂直的笛卡尔标架叫做笛卡尔直角标架，简称直角标架；在一般情况下，$\{O; e_1, e_2, e_3\}$叫做仿射标架。

对于标架 $\{O; e_1, e_2, e_3\}$，如果 e_1, e_2, e_3 间的相互关系和右手拇指、食指、中指相同，则这个标架叫做右旋标架或右手标架。

如果 e_1, e_2, e_3 间的相互关系和左手拇指、食指、中指相同，则这个标架叫做左旋标架或左手标架。



左



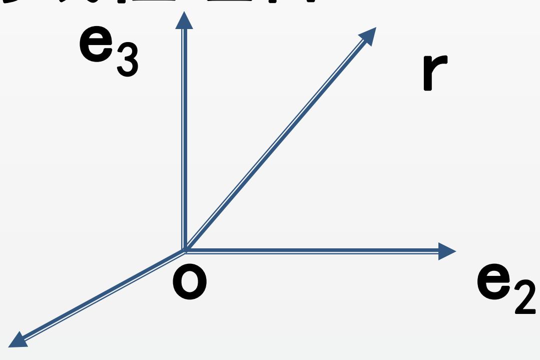
右

在空间任意取定0点，从0点引出三个不共面向量

$\overrightarrow{OE_1}=e_1$　$\overrightarrow{OE_2}=e_2$　$\overrightarrow{OE_3}=e_3$

则由定理1.4.3知，空间任意向量r都可以分解成

e_1, e_2, e_3的线性组合：　　$r=xe_1+ye_2+ze_3$　　(1)



定义1.5.2　(1)中的x, y, z　叫做向量 r关于标架$\{0;\ e_1,\ e_2,\ e_3\}$的分量或称为坐标，记做

$r\{x, y, z\}$　或　$\{x, y, z\}$

定义1.5.3 对于取定了标架 $\{O;\ e_1, e_2, e_3\}$ 的空间中任一点P,矢量$\overrightarrow{OP}$叫做点P的向径,向径$\overrightarrow{OP}$关于标架 $\{O;\ e_1, e_2, e_3\}$ 的分量x,y,z叫做点P关于标架 $\{O;\ e_1, e_2, e_3\}$ 的坐标,记为P(x, y, z)或(x,y,z).

注意1：取定标架后，一个点有唯一一个向径，一个向径对应着唯一一个点。

注意2：点的坐标用圆括号，向量的坐标用花括号。

当空间取定标架$\left\{ O; e_1, e_2, e_3 \right\}$后，空间全体向量

或者全体点的集合与全体有序三数组x,y,z的集合具

有一一对应关系，这种对应关系叫做空间向量或点

的一个坐标系。

空间坐标系由标架$\{O;\ e_1, e_2, e_3\}$完全决定，因此

空间坐标系用标架$\{O;\ e_1, e_2, e_3\}$来表示，这时

点O叫做坐标原点，向量e_1, e_2, e_3都叫做坐标向量。

由右旋标架决定的坐标系叫做右旋坐标系或称右手坐标系；由左旋标架决定的坐标系称为左旋坐标系或左手坐标系。仿射标架、笛卡尔标架、直角标架分别叫做仿射坐标系、笛卡尔坐标系、直角坐标系。

特别约定

1. 在直角坐标系中，坐标向量用 i,j,k表示

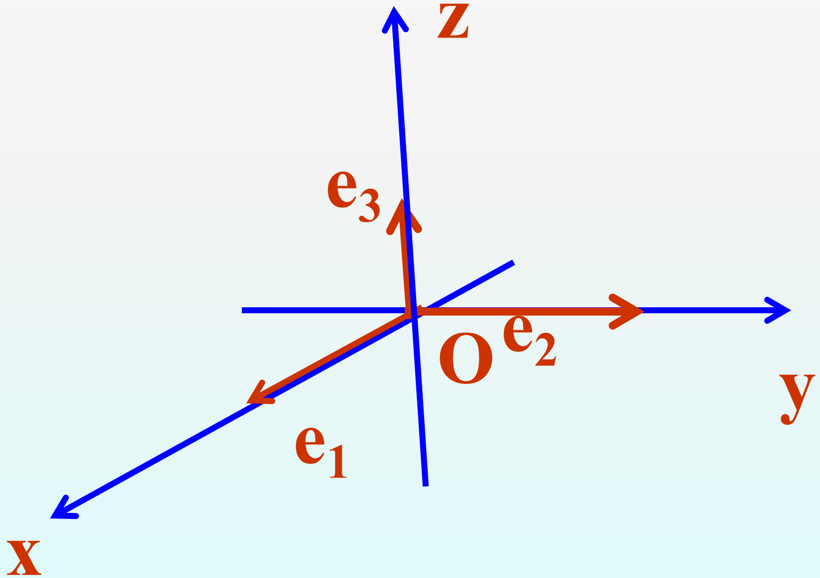
2. 用 $\{O; i,j,k\}$ 表示直角坐标系

3. 以后如不特殊说明,所用坐标系都是指

右手直角坐标系

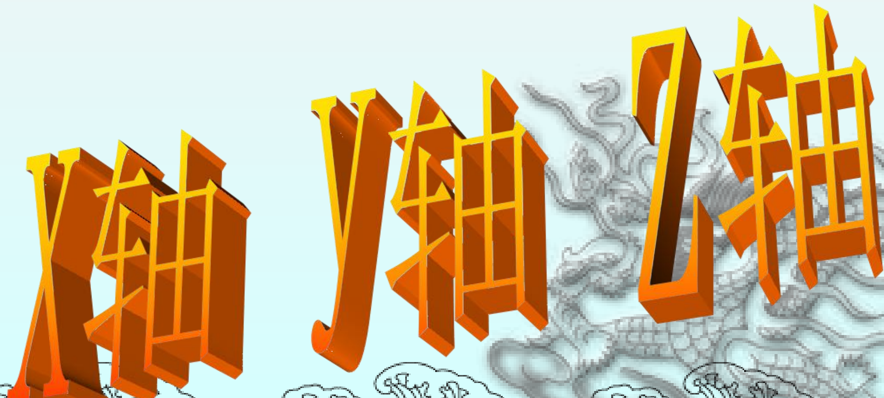
一、坐标轴

过点O沿着三坐标向量e_1, e_2 ,e_3的方向引三轴0x, 0y, 0z, 这样也可以用这三条具有公共点O的不共面的轴0x, 0y, Oz来表示空间坐标系,并记为O-xyz,点O叫做空间坐标系的



原点,轴Ox,Oy,Oz都叫做坐标

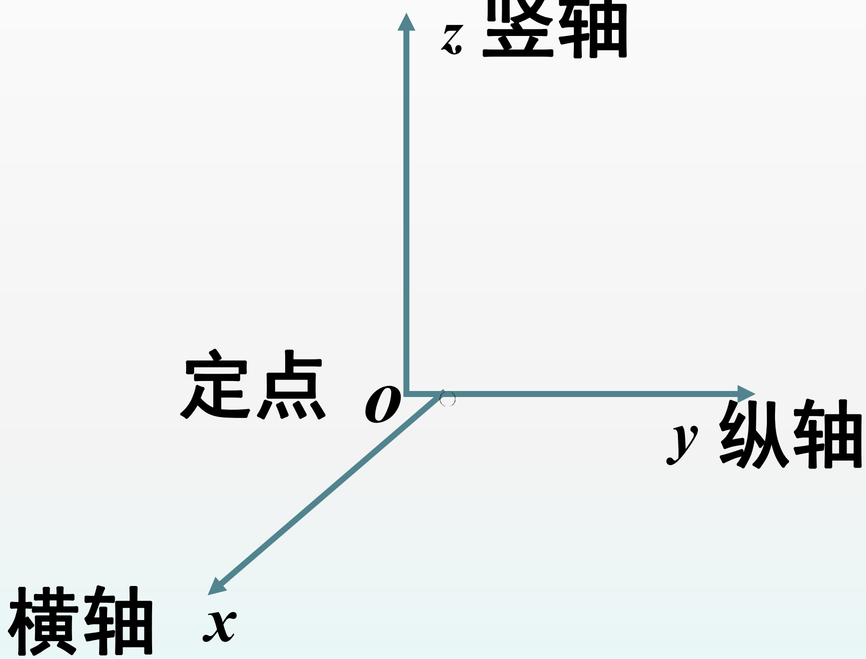
轴，并依次称为:



一、坐标轴

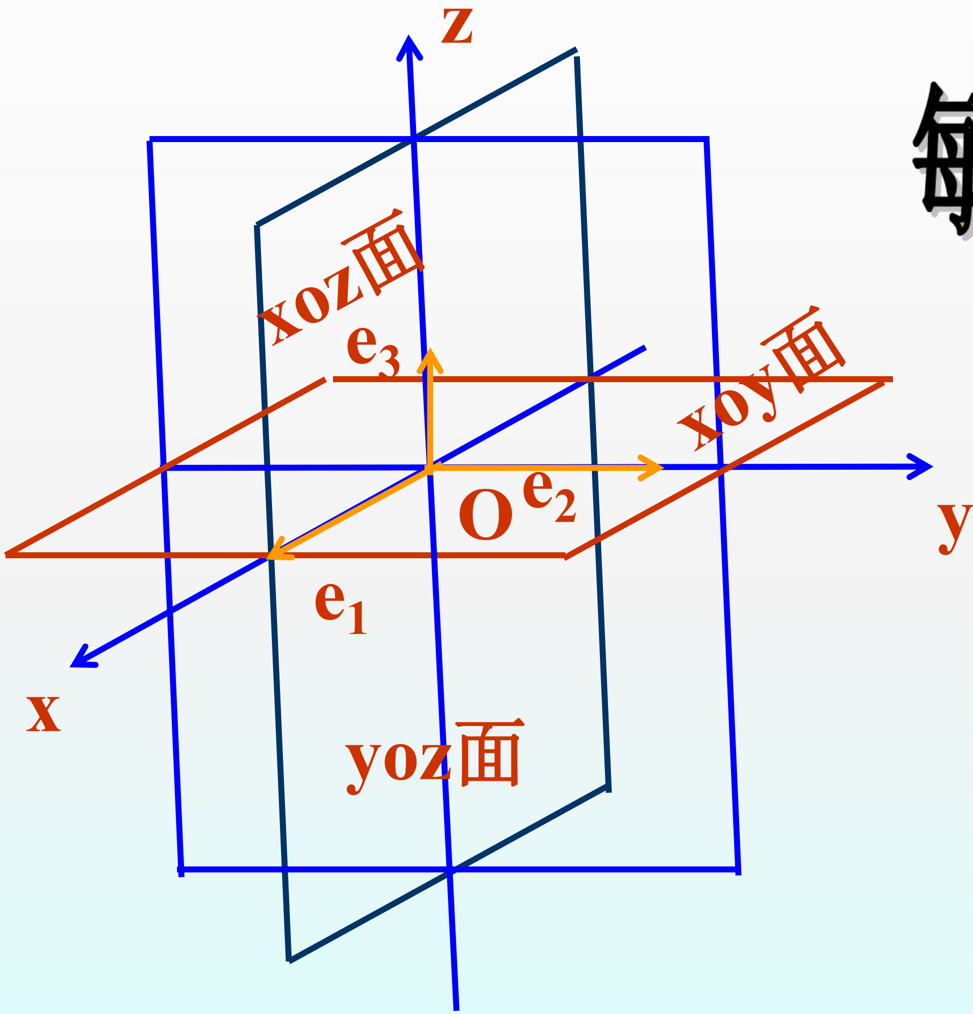
三个坐标轴的正方向符合右手系.

即以右手握住z轴，当右手的四个手指从正向x轴以$\frac{\pi}{2}$角度转向正向y轴时，大拇指的指向就是z轴的正向.



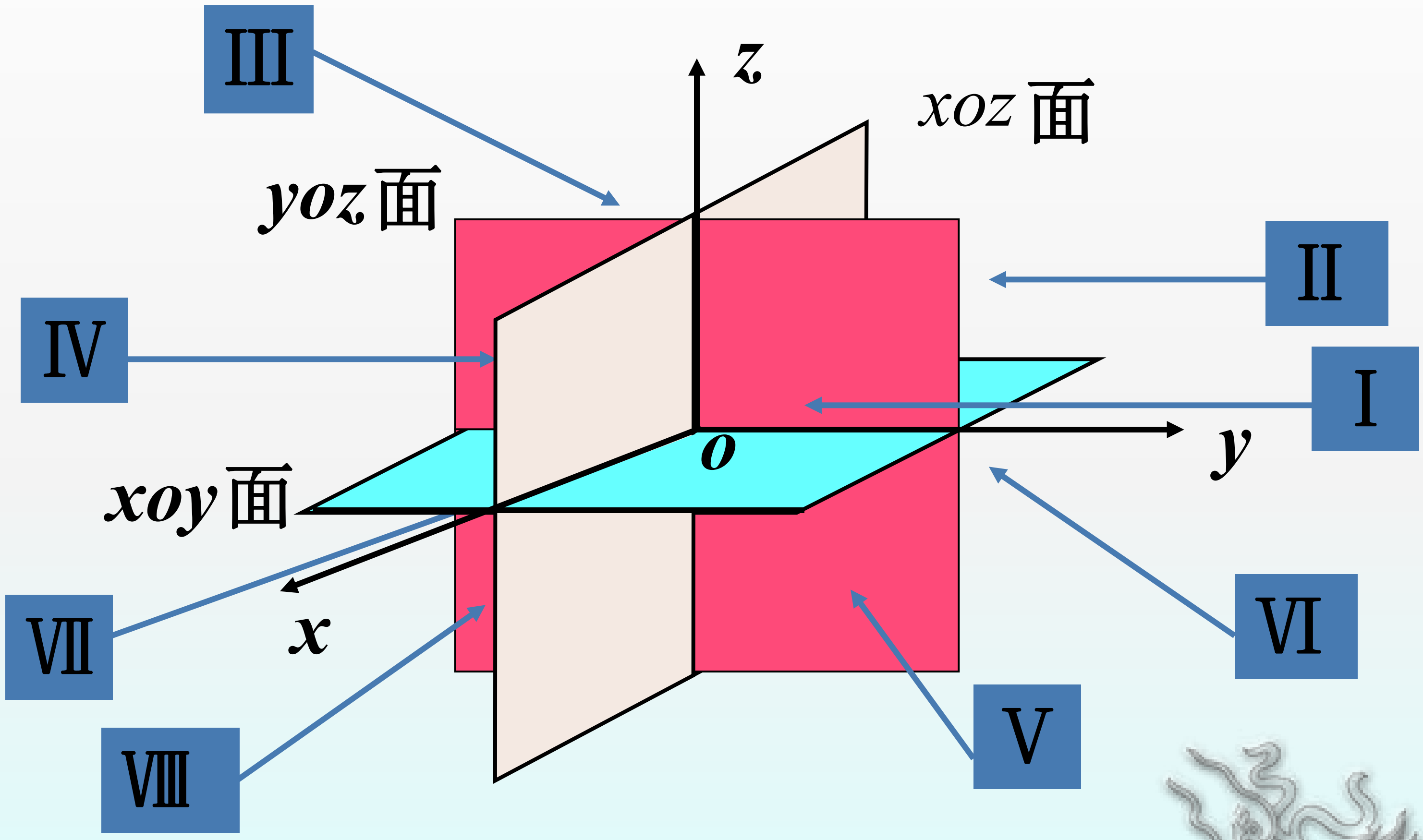
空间直角坐标系

二、坐标平面



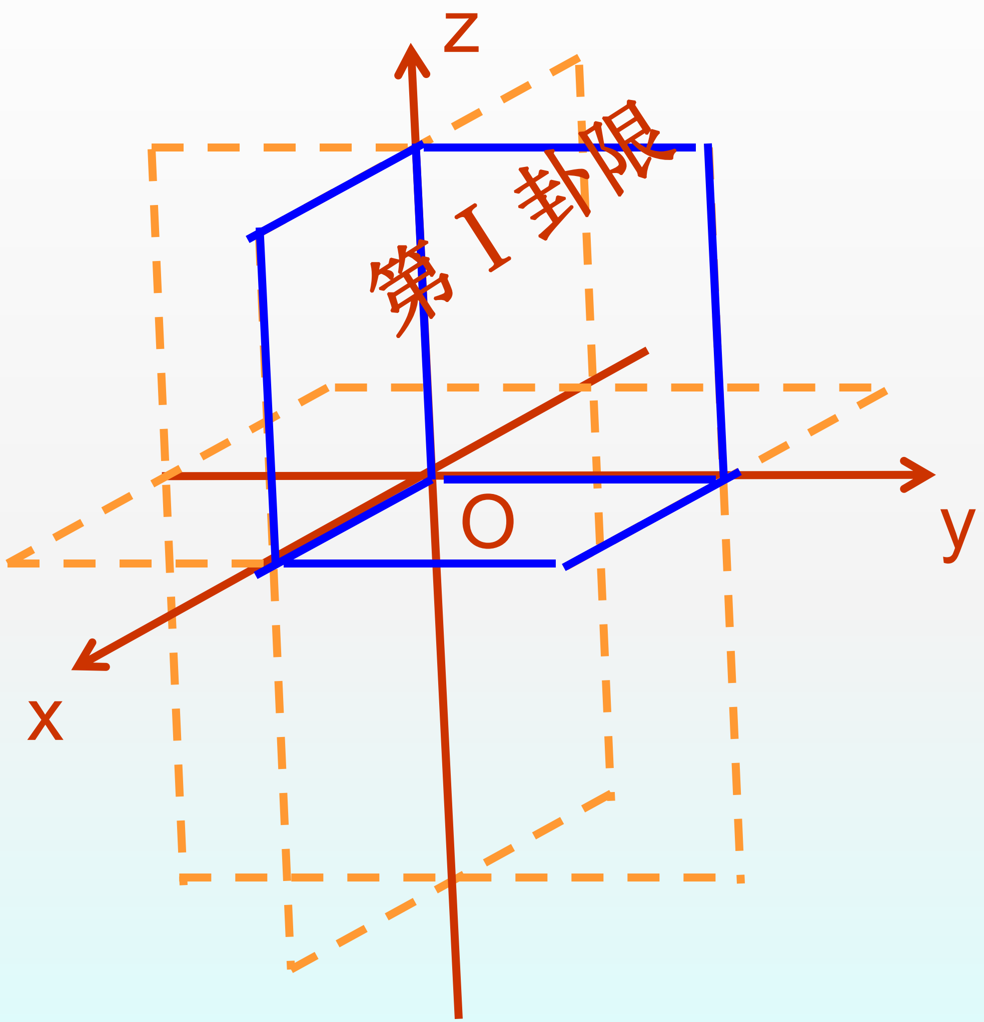
每两条坐标轴所决定的平面

三、卦限



三个坐标面把空间分成8个区域,称为8个卦限.

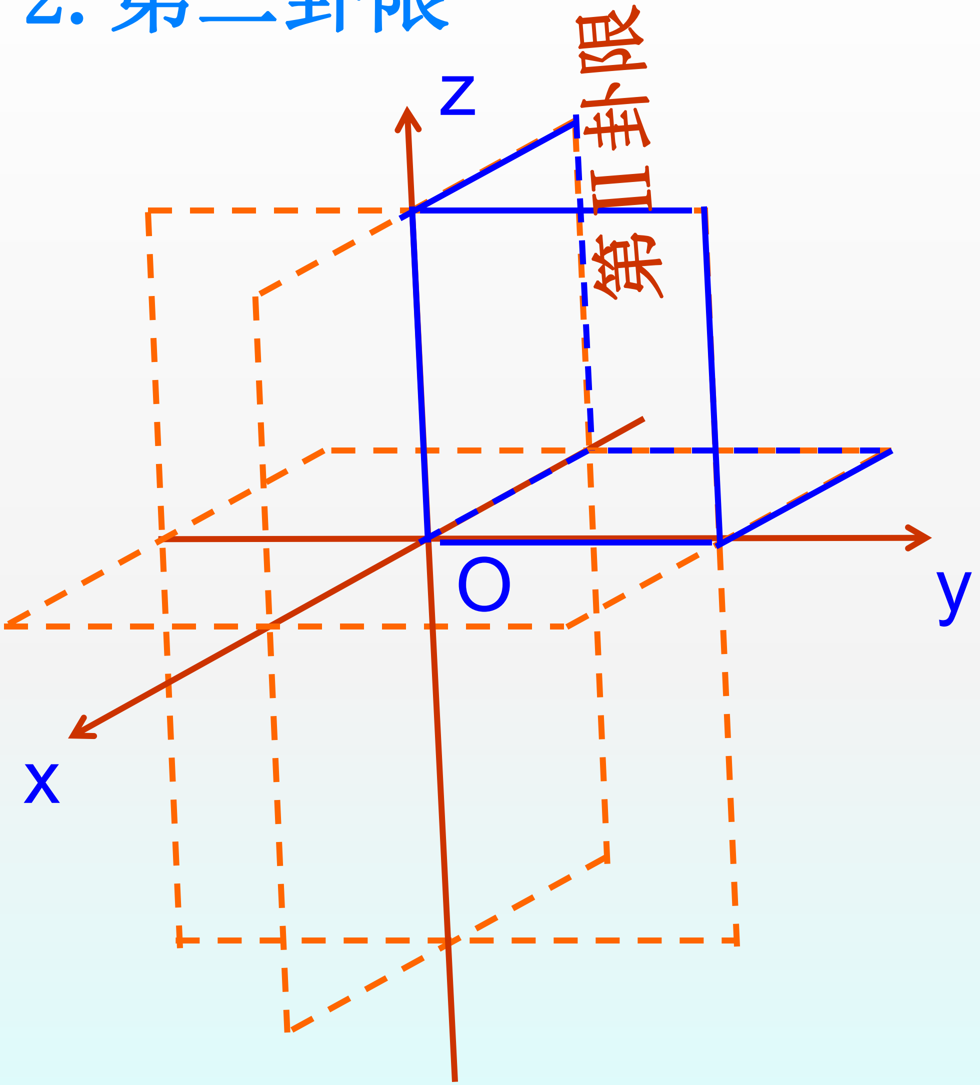
1. 第一卦限



	x	y	z
Ⅰ	+	+	+
Ⅱ			
Ⅲ			
Ⅳ			
Ⅴ			
Ⅵ			
Ⅶ			
Ⅷ			

同一卦限内的点的坐标的符号是一致的.

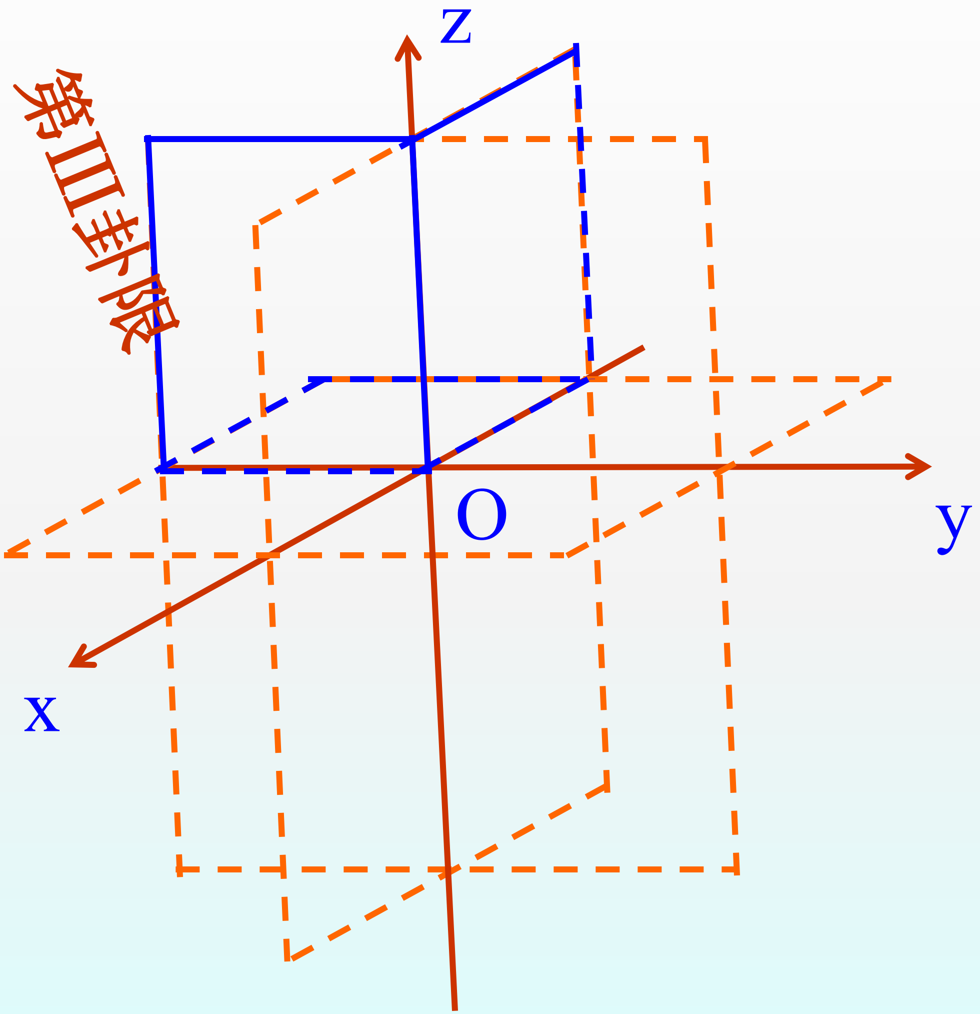
2. 第二卦限



	x	y	z
Ⅰ	+	+	+
Ⅱ	−	+	+
Ⅲ			
Ⅳ			
Ⅴ			
Ⅵ			
Ⅶ			
Ⅷ			

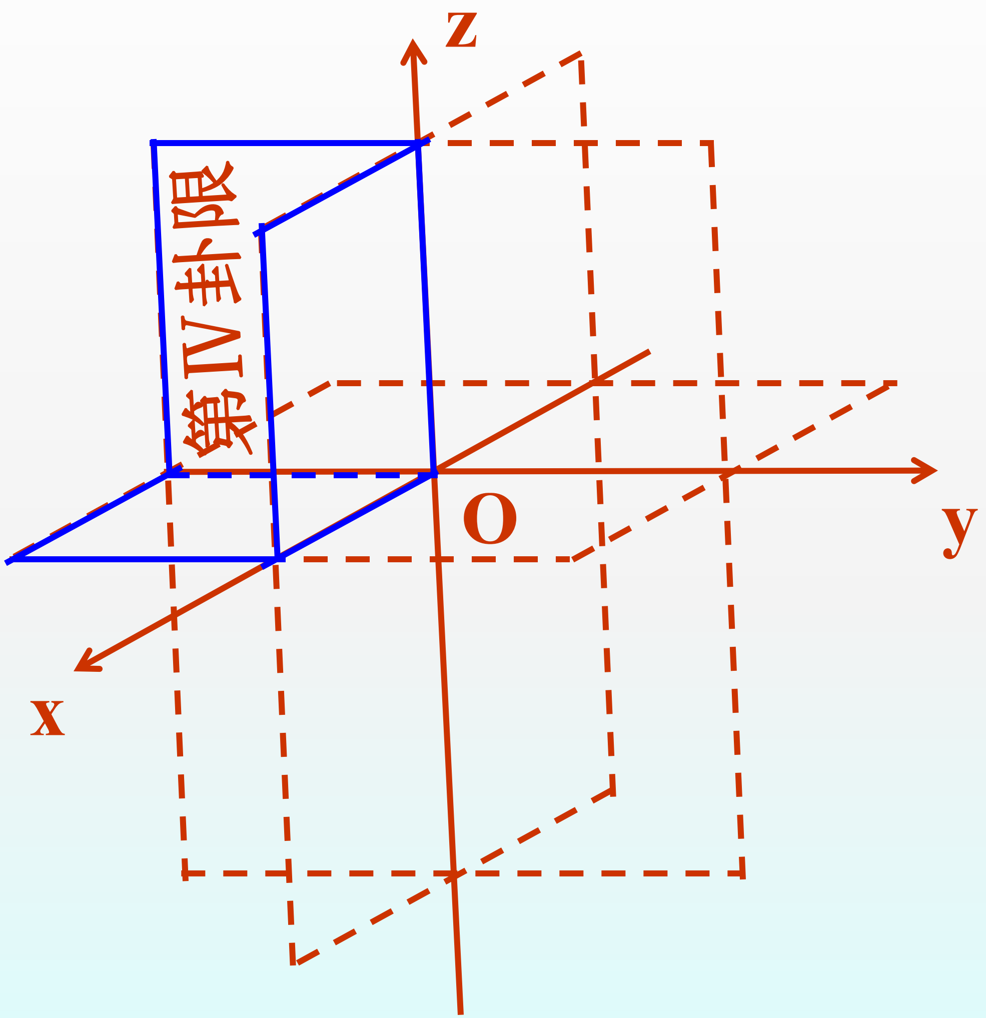
不同卦限内点的坐标的符号不一致.

3. 第三卦限



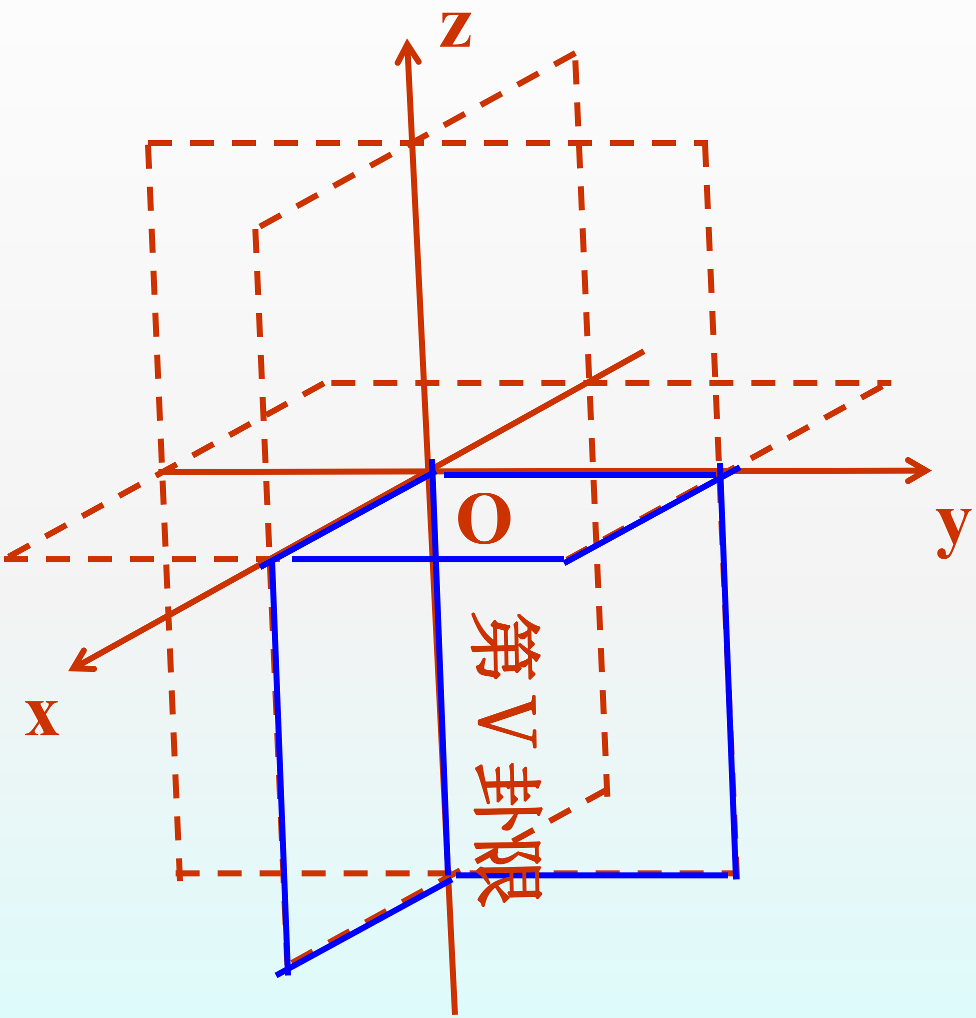
	x	y	z
I	+	+	+
II	−	+	+
III	−	−	+
IV			
V			
VI			
VII			
VIII			

4. 第四卦限



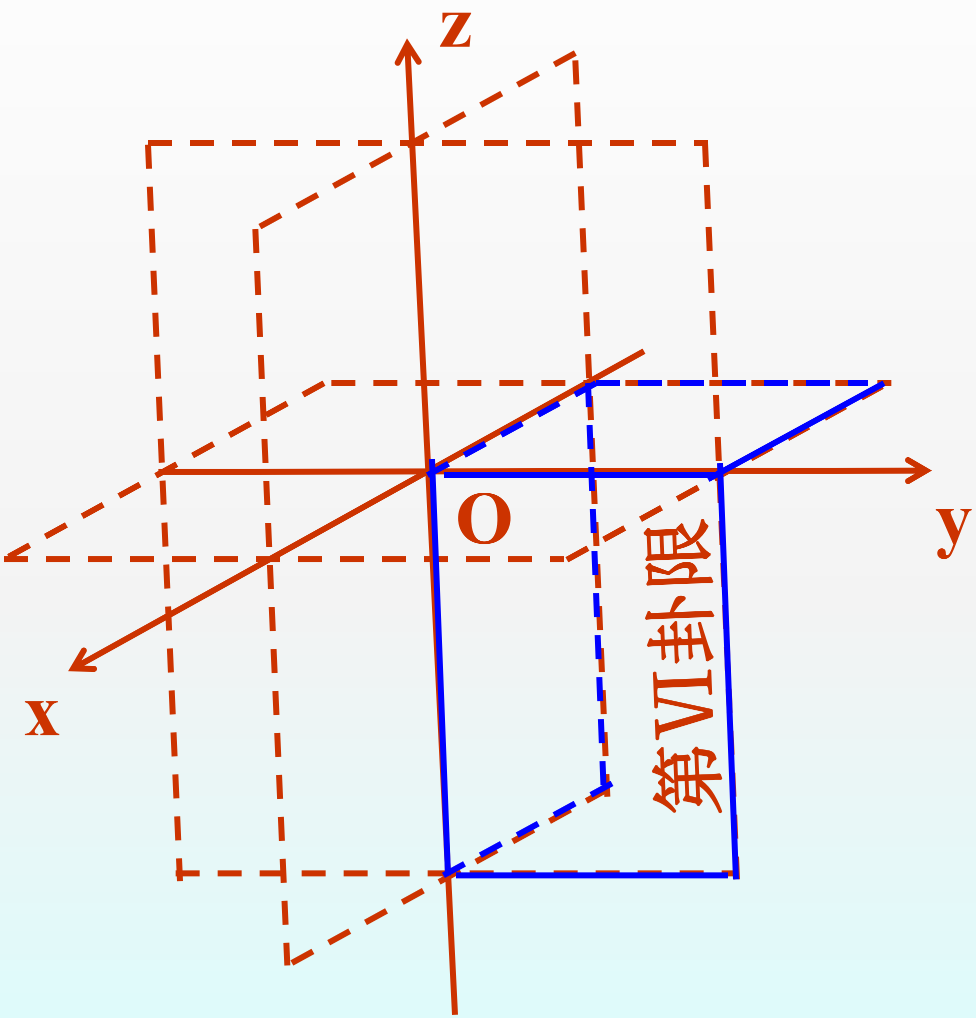
	x	y	z
Ⅰ	+	+	+
Ⅱ	−	+	+
Ⅲ	−	−	+
Ⅳ	+	−	+
Ⅴ			
Ⅵ			
Ⅶ			
Ⅷ			

5. 第五卦限



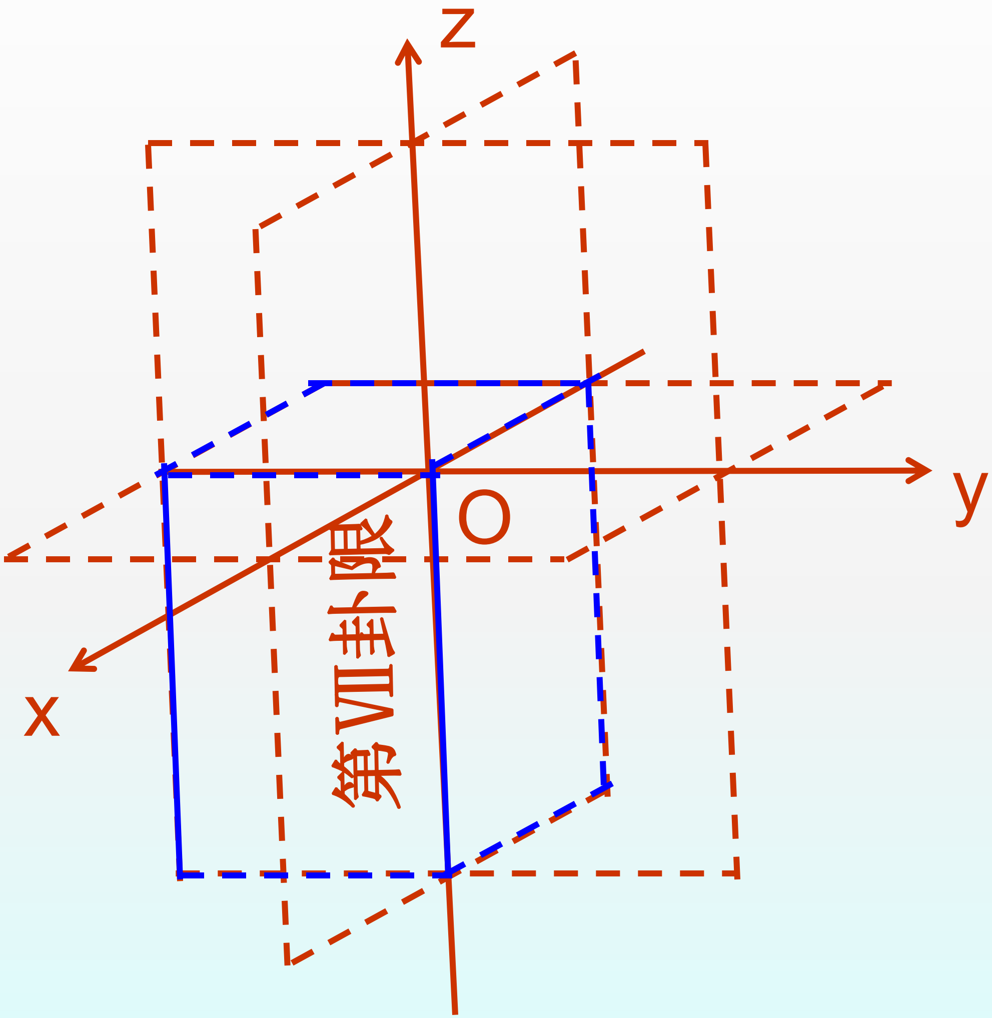
	x	y	z
Ⅰ	+	+	+
Ⅱ	−	+	+
Ⅲ	−	−	+
Ⅳ	+	−	+
Ⅴ	+	+	−
Ⅵ			
Ⅶ			
Ⅷ			

6. 第六卦限



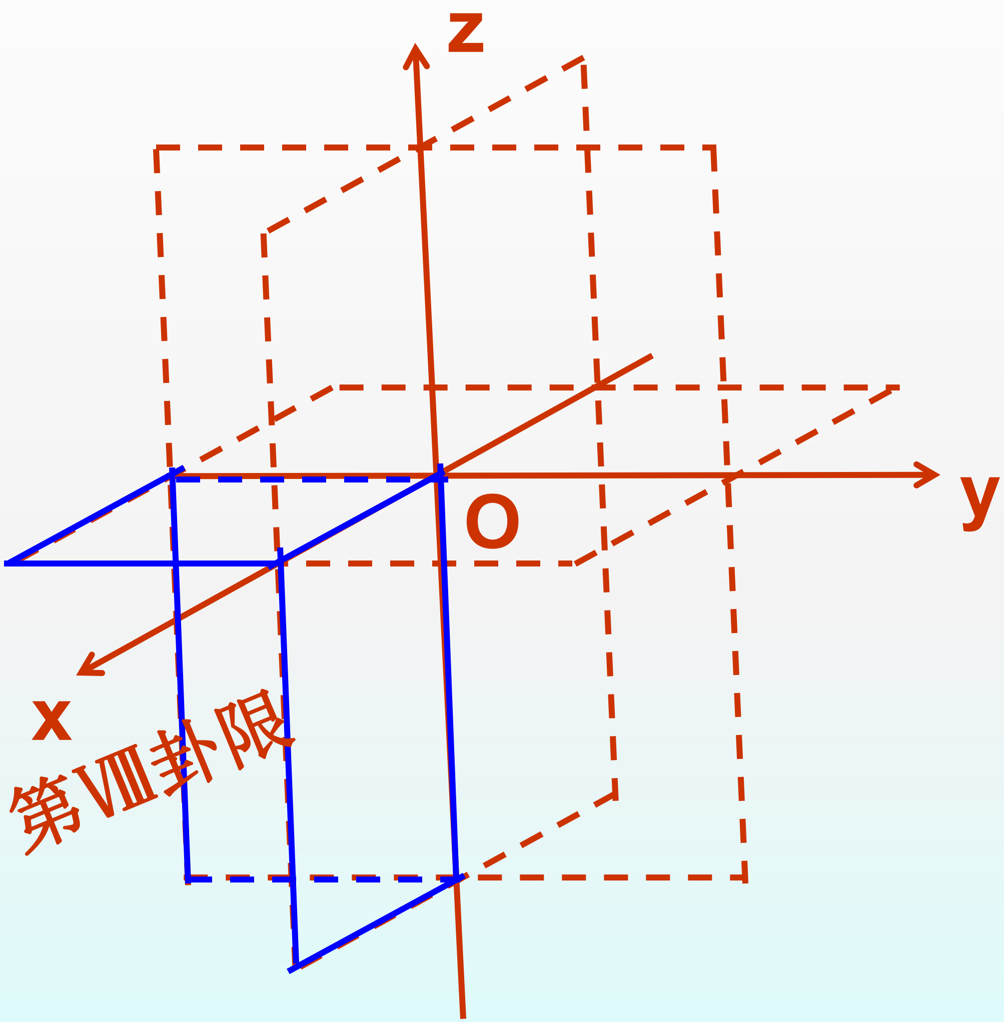
	x	y	z
Ⅰ	+	+	+
Ⅱ	−	+	+
Ⅲ	−	−	+
Ⅳ	+	−	+
Ⅴ	+	+	−
Ⅵ	−	+	−
Ⅶ			
Ⅷ			

7. 第七卦限



	x	y	z
Ⅰ	+	+	+
Ⅱ	−	+	+
Ⅲ	−	−	+
Ⅳ	+	−	+
Ⅴ	+	+	−
Ⅵ	−	+	−
Ⅶ	−	−	−
Ⅷ			

8. 第八卦限



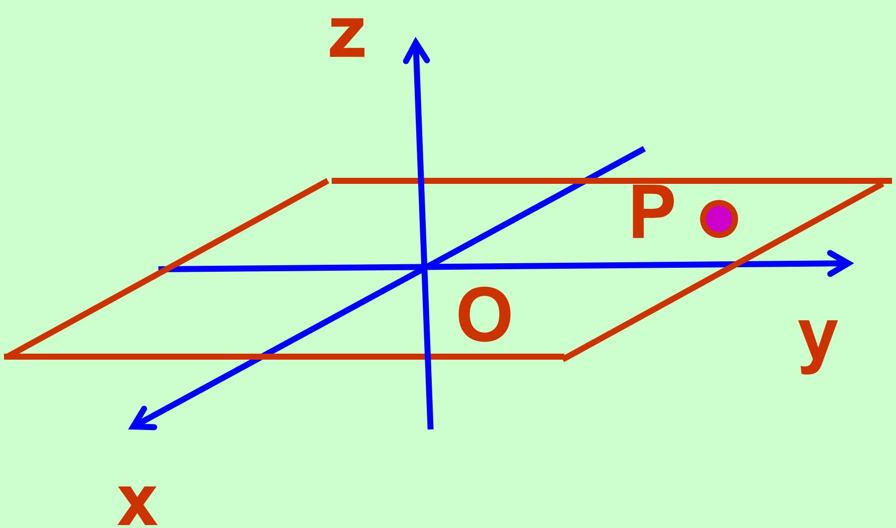
	x	y	z
Ⅰ	+	+	+
Ⅱ	−	+	+
Ⅲ	−	−	+
Ⅳ	+	−	+
Ⅴ	+	+	−
Ⅵ	−	+	−
Ⅶ	−	−	−
Ⅷ	+	−	−

由图形可看出:

如果点P(x,y,z)在xoy面上，则 z=0；

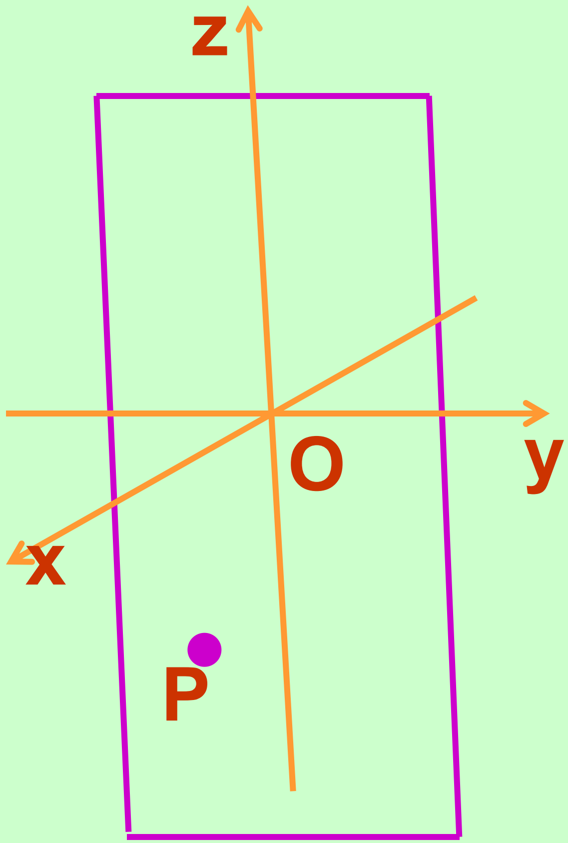
反之，若 z=0，则P(x,y,z)在xoy面上.

称方程 z=0为坐标平面xoy面的方程.



问题:平行于xoy面的平面方程怎样?

由图形可看出:



如果点P(x,y,z)在yoz面上，

则 x=0；反之，若 x=0，

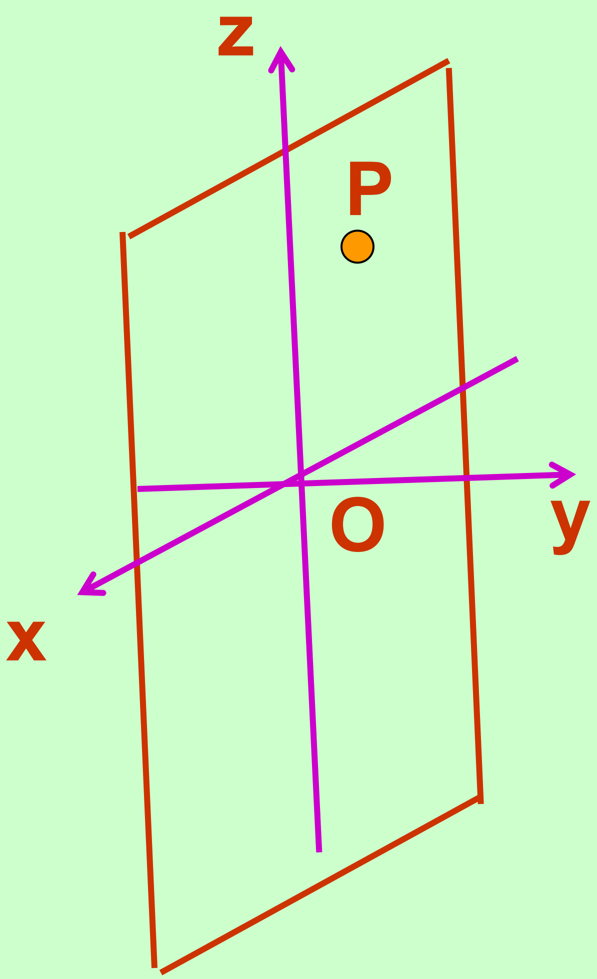
则P(x,y,z)在yoz面上.

称方程 x=0 为坐标平面

yoz面的方程.

问题:平行于yoz面的平面方程又怎样?

由图形可看出:

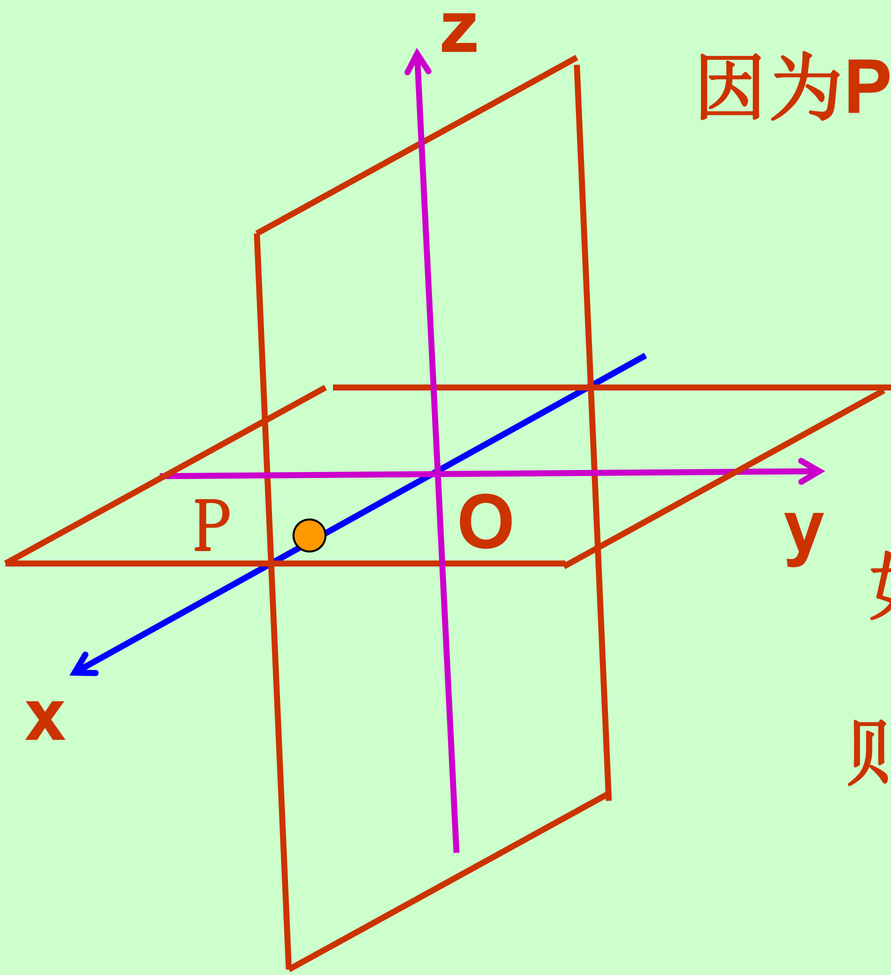


如果点P(x,y,z)在xoz面上，则 y=0；反之，若 y=0，则P(x,y,z)在xoz面上.

称方程 y=0为坐标平面xoz面的方程.

问题:平行于xoz面的平面方程怎样?

求x轴上点任意一点P的坐标.



因为P既在xoy面上,又在xoz面上

所以 $\begin{cases} z=0 \\ y=0 \end{cases}$ 即P(x,0,0)

由图形可看出:

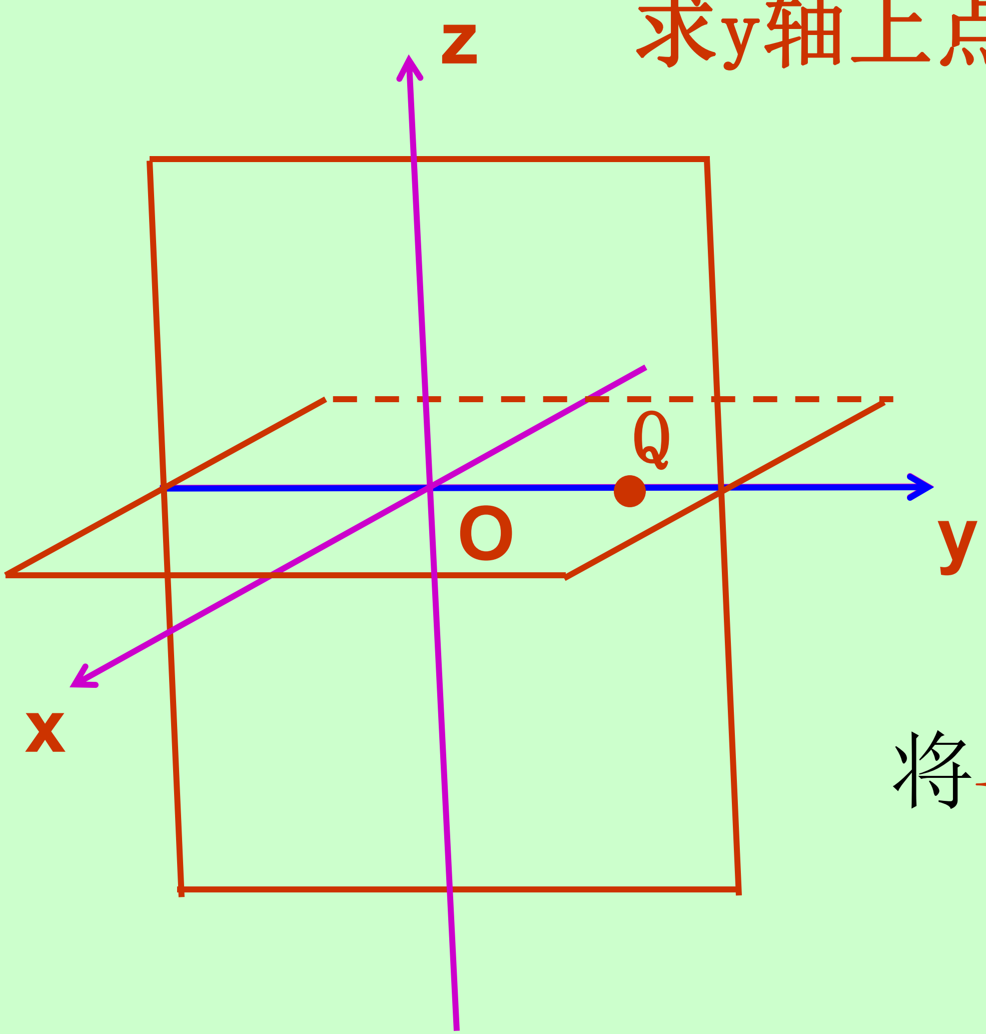
如果点P(x,y,z)在x轴上,

则 $\begin{cases} z=0 \\ y=0 \end{cases}$；反之，若 $\begin{cases} z=0 \\ y=0 \end{cases}$

则P(x,y,z)在x轴上.

称方程 $\begin{cases} z=0 \\ y=0 \end{cases}$ 为坐标轴 x轴的方程.

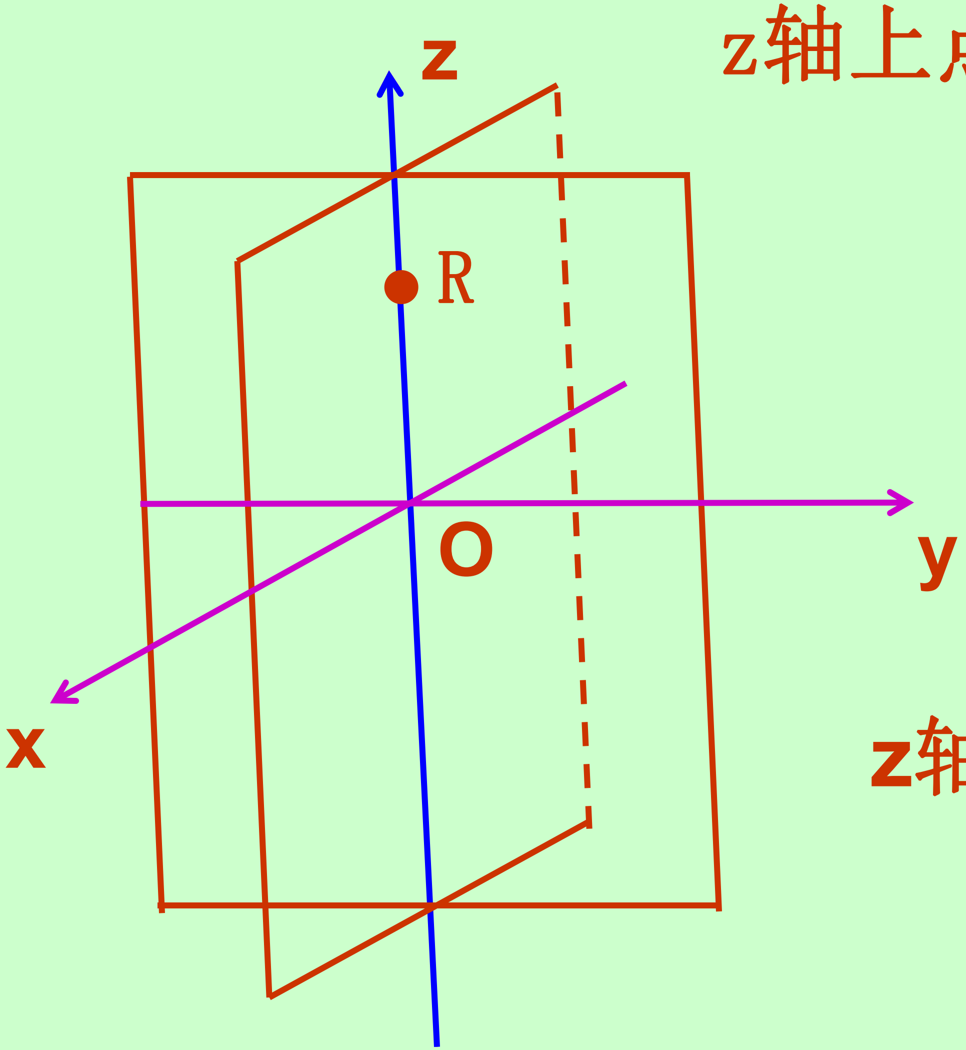
求y轴上点任意一点Q的坐标



因为 $\begin{cases} z=0 \\ x=0 \end{cases}$

所以 Q(0,y,0)

将 $\begin{cases} z=0 \\ x=0 \end{cases}$ 称为y轴的方程.



z轴上点任意一点R的坐标 ：

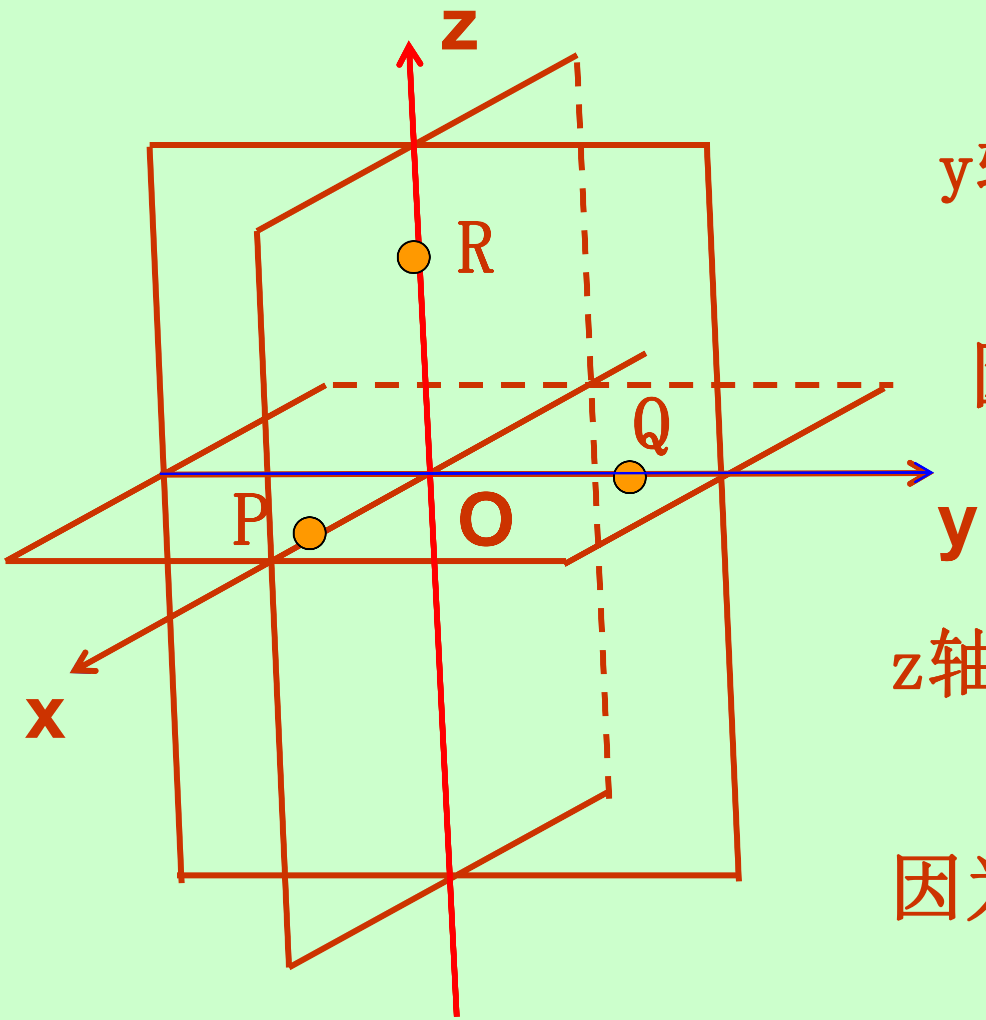
因为 $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$

所以 **R(0,0,z).**

z轴的方程是 $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$

x轴上点任意一点P的坐标

因为 $\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$ 所以 $P(x,0,0)$



y轴上点任意一点Q的坐标

因为 $\begin{cases} z=0 \\ x=0 \end{cases}$ 所以 $Q(0,y,0)$

z轴上点任意一点R的坐标

因为 $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ 所以 $P(0,0,z)$

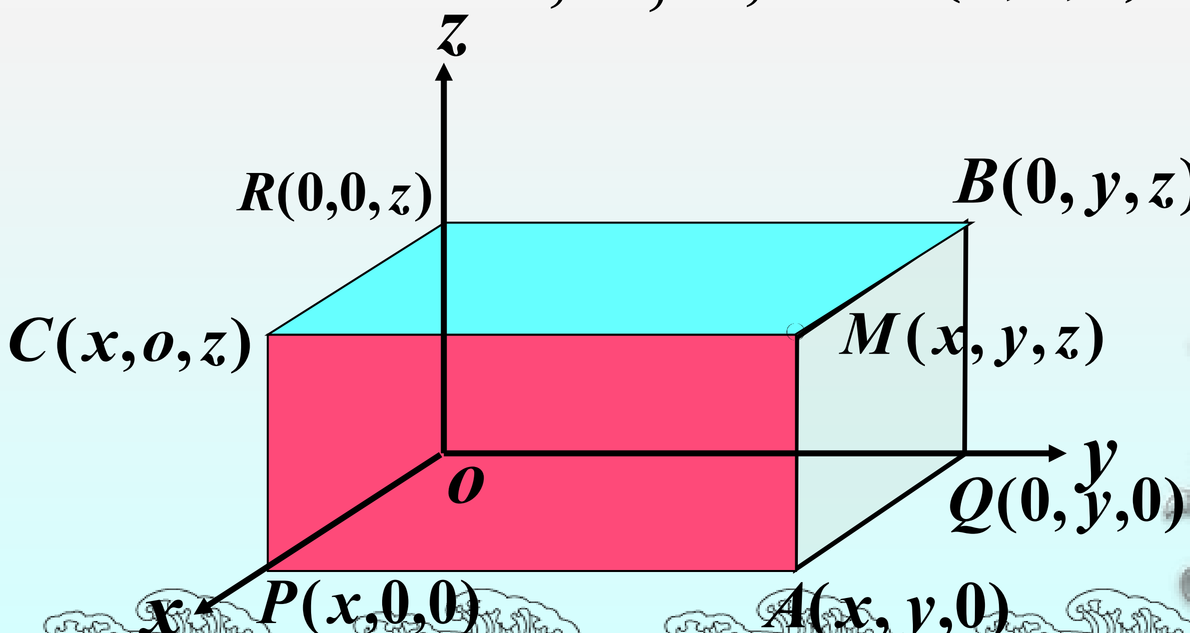
四、空间点的直角坐标

空间的点 $\xleftrightarrow{1--1}$ 有序数组(x, y, z)

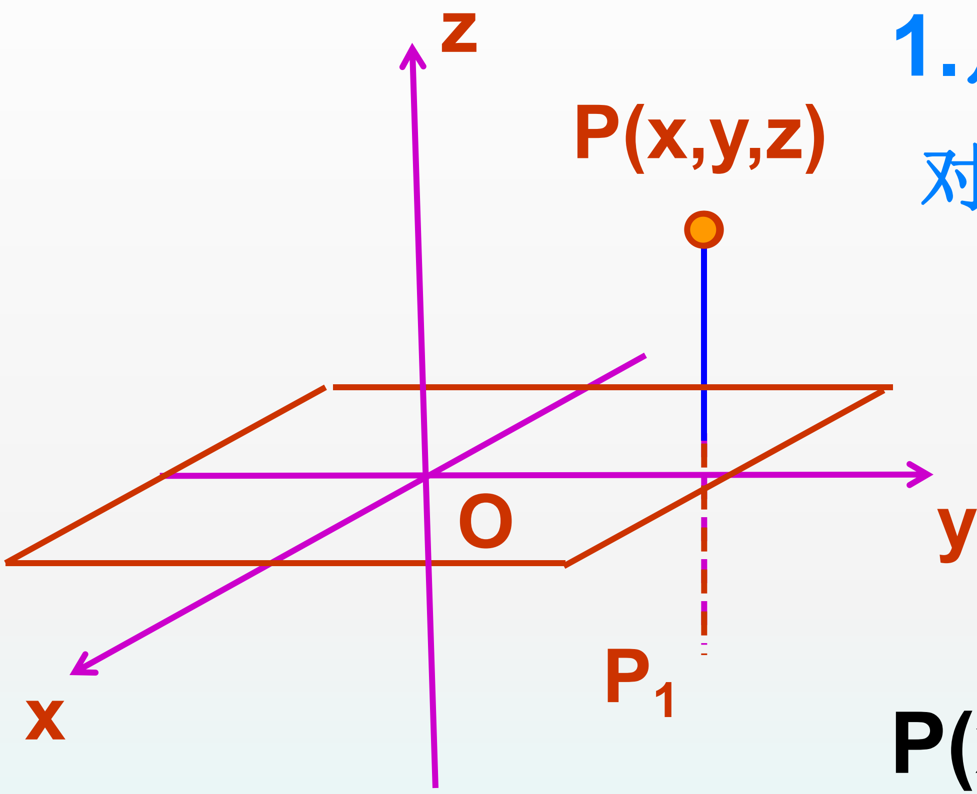
称为**点M的坐标**，记为 $M(x, y, z)$

特殊点的表示：　坐标轴上的点 $P, Q, R,$

坐标面上的点 $A, B, C,$　$O(0,0,0)$



五、点关于坐标面的对称点

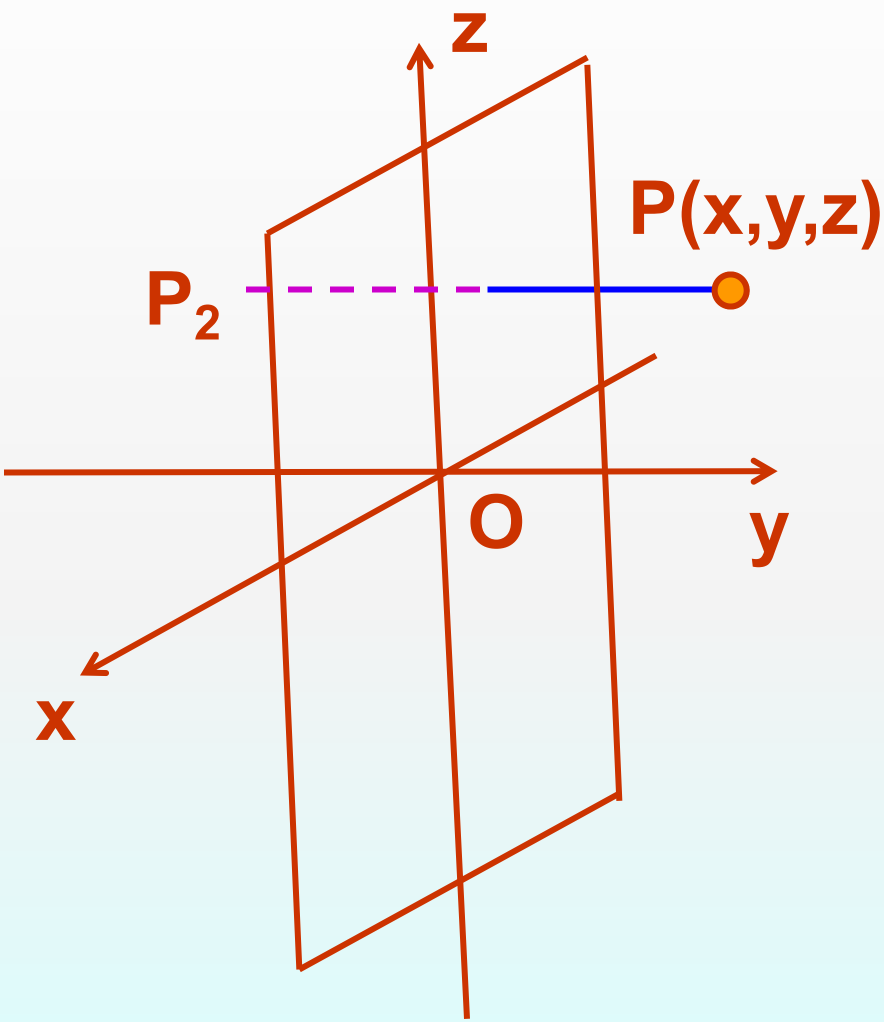


1.点P(x,y,z)关于xoy面的对称点的坐标：

x坐标, y坐标不变,

z坐标变为相反数

P(x,y,z)关于xoy面的对称点为P_1（x, y, -z)

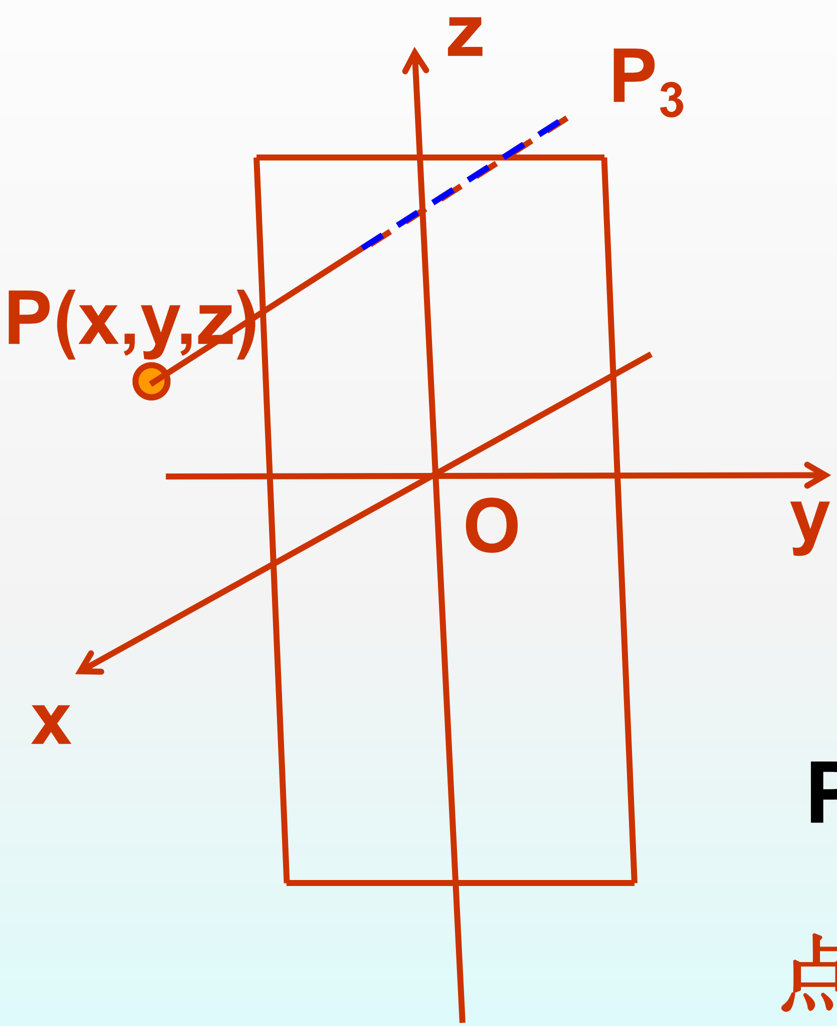


2.点P(x,y,z)关于xoz面的对称点的坐标：

x坐标, z坐标不变,

y坐标变为相反数

P(x,y,z)关于xoz 面的对称点为P_2（x,- y, z)



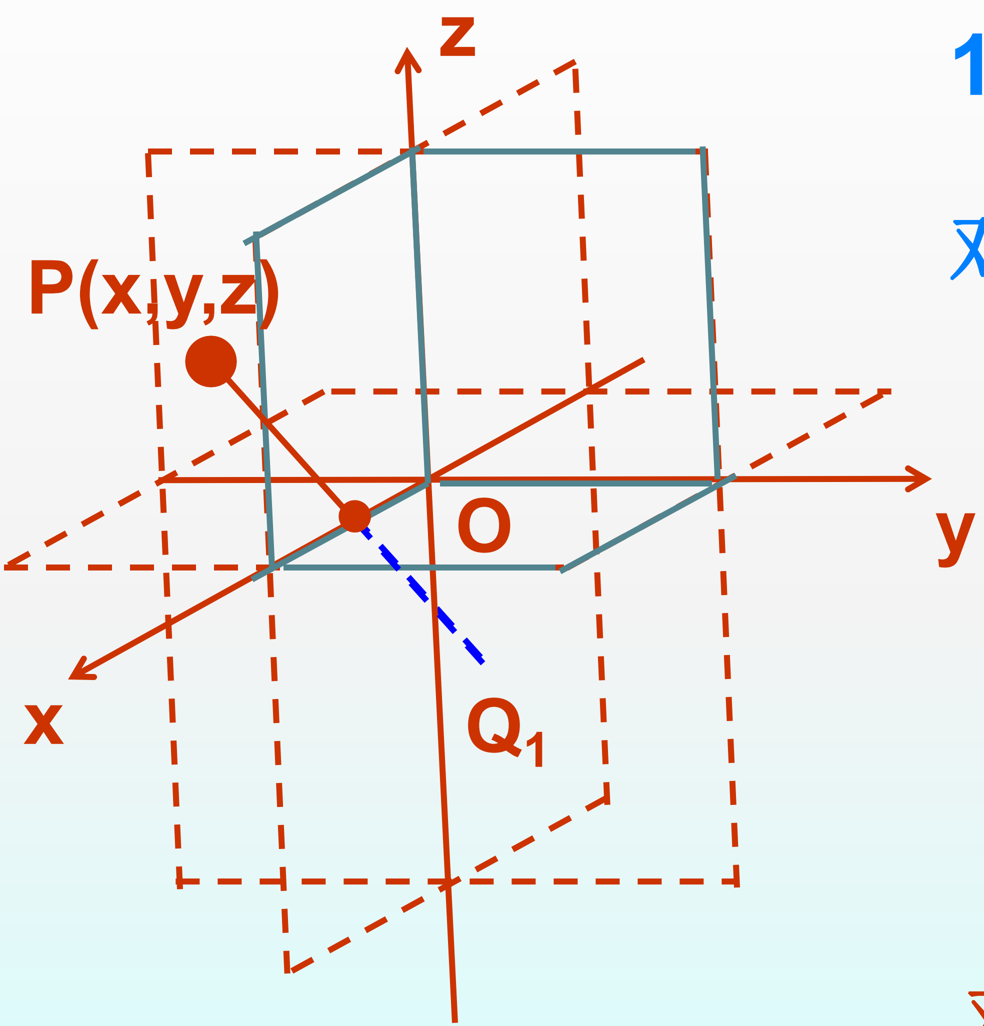
3.点P(x,y,z)关于yoz面的对称点的坐标：

y坐标, z坐标不变,

x坐标变为相反数.

P(x,y,z)关于yoz面的对称点为P_3（-x ,y, z)

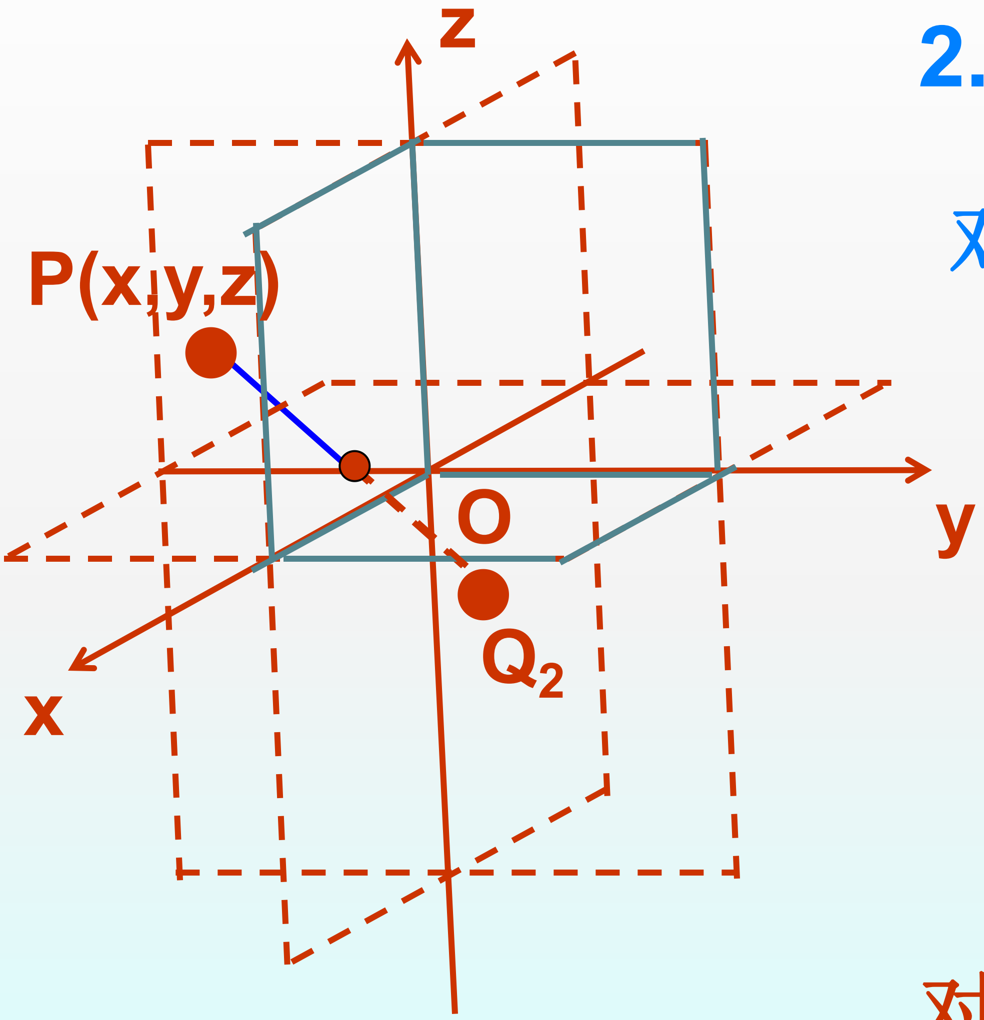
六、点关于坐标轴的对称点



1.点P(x,y,z)关于x轴的对称点的坐标：

x坐标不变, y坐标与z坐标变为相反数.

P(x,y,z)关于x轴的对称点为Q_1(x,-y,-z)



2.点P(x,y,z)关于y轴的对称点的坐标：

y坐标不变，x坐标与z坐标变为相反数.

P(x,y,z)关于y轴的对称点为Q_2(-x ,y, -z)

3.同理可知: P(x,y,z)关于z轴的对称点为

Q_3(-x ,-y ,z)

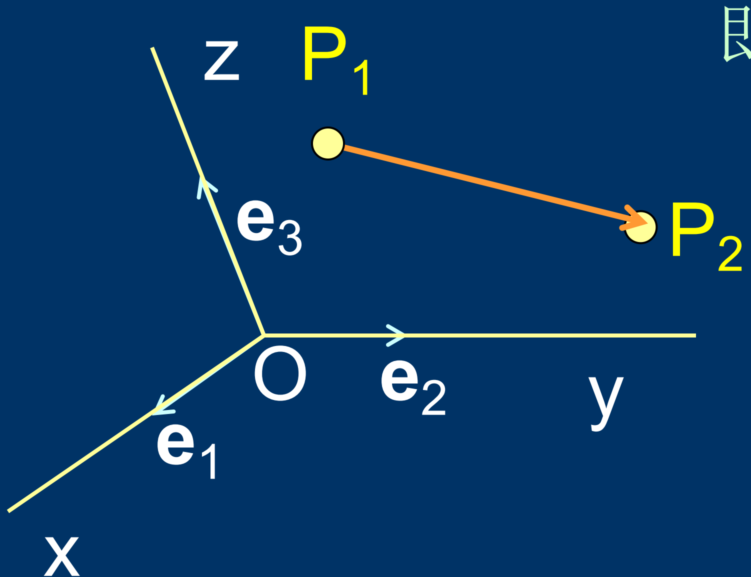
4.P(x,y,z)关于坐标原点的对称点为

Q(-x,-y,-z)

七、用坐标进行向量的运算

1) 用向量的始点和终点的坐标表示向量的坐标.

定理1.5.1 向量的坐标等于其终点坐标减去其始点坐标.

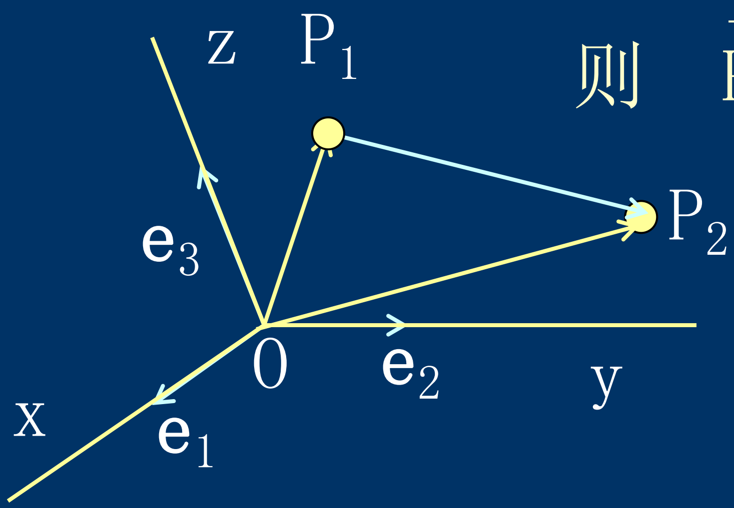


即　若 $P_1(x_1,y_1,z_1)$，$P_2(x_2,y_2,z_2)$

则　$\overrightarrow{P_1P_2}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}$

定理1.5.1 向量的坐标等于其终点坐标减去其始点坐标.

即　若$P_1(x_1, y_1, z_1)$，$P_2(x_2, y_2, z_2)$



则　$\overrightarrow{P_1P_2} = \{x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1\}$

证：因为 $\overrightarrow{OP_1}=x_1\mathbf{e}_1+y_1\mathbf{e}_2+z_1\mathbf{e}_3$

$\overrightarrow{OP_2}=x_2\mathbf{e}_1+y_2\mathbf{e}_2+z_2\mathbf{e}_3$

所以 $\overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP_1}=(x_2\mathbf{e}_1+y_2\mathbf{e}_2+z_2\mathbf{e}_3)-(x_1\mathbf{e}_1+y_1\mathbf{e}_2+z_1\mathbf{e}_3)$

$=(x_2-x_1)\mathbf{e}_1+(y_2-y_1)\mathbf{e}_2+(z_2-z_1)\mathbf{e}_3$

即 $\overrightarrow{P_1P_2} = \{x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1\}$　　(1.5-1)

2）用向量的分量（坐标）进行向量的线性运算

定理1.5.2　两向量和的坐标等于两向量对应的坐标的和.

证：　设　$\mathbf{a}=\{X_1, Y_1, Z_1\}$，$\mathbf{b}=\{X_2, Y_2, Z_2\}$，

则　$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\{X_1, Y_1, Z_1\}+\{X_2, Y_2, Z_2\}$，

$$=(X_1\mathbf{e}_1+Y_1\mathbf{e}_2+Z_1\mathbf{e}_3)+(X_2\mathbf{e}_1+Y_2\mathbf{e}_2+Z_2\mathbf{e}_3)$$

$$=(X_1+X_2)\mathbf{e}_1+(Y_1+Y_2)\mathbf{e}_2+(Z_1+Z_2)\mathbf{e}_3$$

所以　$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\{X_1+X_2,\ Y_1+Y_2,\ Z_1+Z_2\}$，　（1.5-2）

定理得证.

定理1.5.3　数乘向量的坐标等于这个数与向量对应坐标的积.

证：　设$a=\{X, Y, Z\}$，　则对任意实数λ，有

$$\lambda a=\lambda\{X, Y, Z\}$$

$$=\lambda(Xe_1+Ye_2+Ze_3)$$

$$=(\lambda X)e_1+(\lambda Y)e_2+(\lambda Z)e_3$$

所以　$\lambda a=\{\lambda X, \lambda Y, \lambda Z\}$　(1.5-3)

定理得证.

3) 两向量共线,三向量共面的条件

定理1. 5. 4　两个非零向量**a**$\{X_1, Y_1, Z_1\}$，**b**$\{X_2, Y_2, Z_2\}$共线的充要条件是对应分量（坐标）成比例. 即

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{Y_1}{Y_2} = \frac{Z_1}{Z_2} \qquad (1.5\text{-}4)$$

证：根据定理1.4.1,两个非零向量**a**,**b**共线的充要条件是其中一个向量可以用另一个向量来线性表示.

不妨设**a**= λ**b**,　　于是

$$\{X_1, Y_1, Z_1\} = \lambda\{X_2, Y_2, Z_2\} = \{\lambda X_2, \lambda Y_2, \lambda Z_2\}$$

所以

$$X_1 = \lambda X_2\,,\quad Y_1 = \lambda Y_2\,,\quad Z_1 = \lambda Z_2$$

即

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{Y_1}{Y_2} = \frac{Z_1}{Z_2}$$ 成立.

约定：当分母为零时，约定分子也为零.

推论：三点$A(x_1, y_1, z_1)$， $B(x_2, y_2, z_2)$ $C(x_3, y_3, z_3)$

共线的充要条件是：

$$\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1} = \frac{y_2-y_1}{y_3-y_1} = \frac{z_2-z_1}{z_3-z_1} \qquad (1.5\text{-}5)$$

证: 因为 A,B,C三点共线的充要条件是$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AC}$共线,

另一方面, $\overrightarrow{AB} = \{x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1\}$

$\overrightarrow{AC} = \{x_3-x_1, y_3-y_1, z_3-z_1\}$

由定理1.5.4， 问题得证.

定理1.5.5 三个非零向量**a**$\{X_1, Y_1, Z_1\}$，**b** $\{X_2, Y_2, Z_2\}$，**c** $\{X_3, Y_3, Z_3\}$，共面的充要条件是

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad (1.5\text{-}6)$$

证: 根据定理1.4.7, 三向量**a**, b, c共面的充要条件是

存在不全为零的数 λ，μ，v，使得 $\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} + v \mathbf{c} = 0$

由此可得 $\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} + v \mathbf{c} = 0$ 即有

$$\lambda\{X_1, Y_1, Z_1\} + \mu\{X_2, Y_2, Z_2\} + v\{X_3, Y_3, Z_3\} = \{0, 0, 0\}$$

$$\lambda\{X_1, Y_1, Z_1\}+\mu\{X_2, Y_2, Z_2\}+\nu\{X_3, Y_3, Z_3\}=\{0, 0, 0\}$$

从而
$$\begin{cases}\lambda X_1+\mu X_2+\nu X_3=0\\ \lambda Y_1+\mu Y_2+\nu Y_3=0\\ \lambda Z_1+\mu Z_2+\nu Z_3=0\end{cases}$$

因为上式为关于λ，μ，ν的三元一次方程组，且其解

λ，μ，ν不全为零，

所以
$$\begin{vmatrix}X_1 & Y_1 & Z_1\\ X_2 & Y_2 & Z_2\\ X_3 & Y_3 & Z_3\end{vmatrix}=0$$

定理得证.

推论 四个点$A_1(x_1, y_1, z_1)$，$A_2(x_2, y_2, z_2)$，$A_3(x_3, y_3, z_3)$，

$A_4(x_4, y_4, z_4)$共面的充要条件是

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (1.5\text{-}7)$$

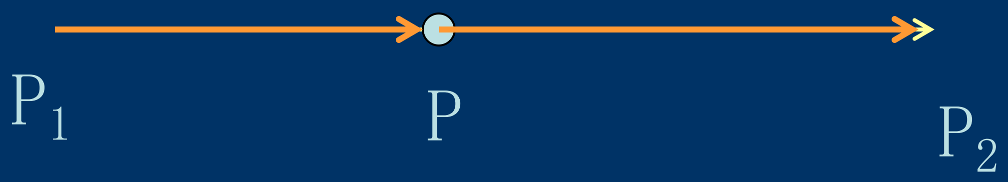
或者

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (1.5\text{-}7')$$

4) 线段的定比分点坐标

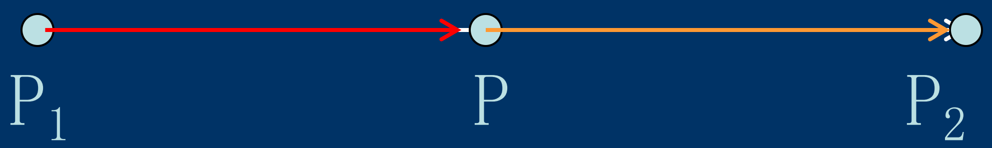
对于有向线段$\overrightarrow{P_1P_2}$ $(P_1 \neq P_2)$,如果点P 满足 $\overrightarrow{P_1P} = \lambda \overrightarrow{PP_2}$,

则称点P是把有向线段$\overrightarrow{P_1P_2}$分成定比 λ 的分点.

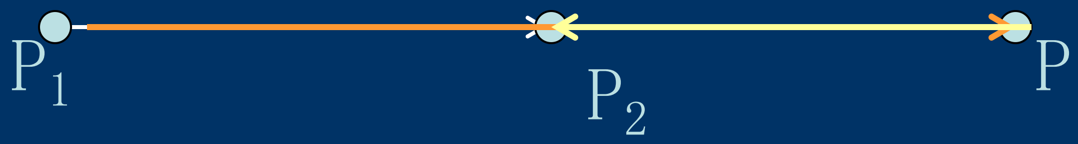


说明: 1) 对于点P_1, P_2,如果 λ 给定, 则分点P唯一确定.

2) $\lambda>0$, $\overrightarrow{P_1P}$和$\overrightarrow{PP_2}$同向, P为$\overrightarrow{P_1P_2}$的内点 .



3) $\lambda<0$, $\overrightarrow{P_1P}$和$\overrightarrow{PP_2}$反向, P为$\overrightarrow{P_1P_2}$的外点.

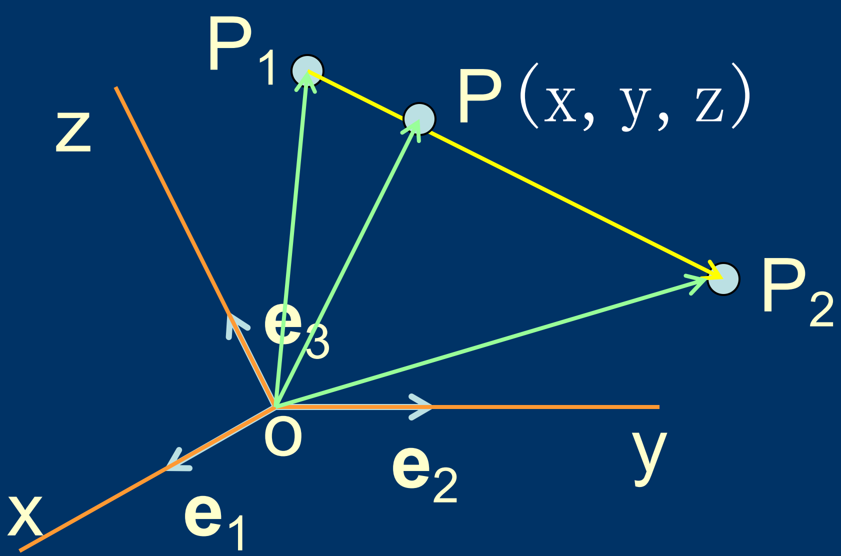


4) $\lambda\neq-1$

否则, $\overrightarrow{P_1P}=-\overrightarrow{PP_2}$, 即$\overrightarrow{P_1P}=\overrightarrow{P_2P}$, 故$P_1=P_2$. 与$P_1\neq P_2$矛盾

定理1.5.6 设有向线段P_1P_2的始点为$P_1(x_1, y_1, z_1)$，终点为$P_2(x_2, y_2, z_2)$，则分有向线段P_1P_2成定比 λ 的分点P的坐标为

$$\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad \frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda} \qquad (1.5\text{-}8)$$



分析：设$P(x, y, z)$，

由$\overrightarrow{P_1P}=\lambda\overrightarrow{PP_2}$

及$\overrightarrow{P_1P}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OP_1}$，$\overrightarrow{PP_2}=\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP}$

解出$\overrightarrow{OP}$即可.

证: 由$\overrightarrow{P_1P} = \lambda \overrightarrow{PP_2}$ 及$\overrightarrow{P_1P} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_1}$, $\overrightarrow{PP_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP}$

得 $\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_1} = \lambda(\overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP})$

所以 $(1+\lambda)\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + \lambda\overrightarrow{OP_2}$ 即 $\overrightarrow{OP} = \dfrac{\overrightarrow{OP_1} + \lambda\overrightarrow{OP_2}}{(1+\lambda)}$

将 $\overrightarrow{OP}\{x, y, z\}$ $\overrightarrow{OP_1}\{x_1, y_1, z_1\}$ $\overrightarrow{OP_2}\{x_2, y_2, z_2\}$

代入上式, 得

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} \qquad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}$$

推论: 设$P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$, 则线段

P_1P_2的中点坐标为:

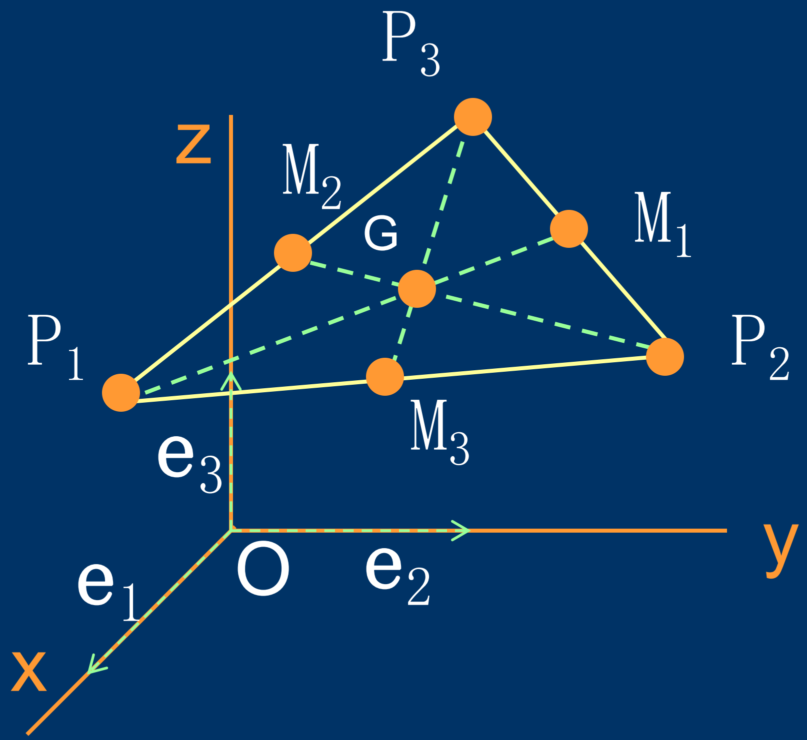
$$x=\frac{x_1+x_2}{2} \quad y=\frac{y_1+y_2}{2} \quad z=\frac{z_1+z_2}{2} \quad (1.5\text{-}9)$$

例　已知三角形顶点

$P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2)$

$P_3(x_3, y_3, z_3)$，求$\triangle P_1P_2P_3$的重心坐标。

解:如图　设重心为G(x.y.z)　由平面几何知　$\overrightarrow{P_1G}=2\overrightarrow{GM_1}$,



又因为M_1是P_2P_3的中点

再由中点公式, 有

$$M_1\left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}, \frac{z_2+z_3}{2}\right)$$

又由定比分点坐标公式,得

$$x=\frac{x_1+2x_{M1}}{1+2}\qquad y=\frac{y_1+2y_{M1}}{1+2}\qquad z=\frac{z_1+2z_{M1}}{1+2}$$

所以

$$x=\frac{x_1+2\,\dfrac{x_2+x_3}{2}}{1+2}=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$$

同理

$$y=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\qquad z=\frac{z_1+z_2+z_3}{3}$$

于是, $\triangle P_1P_2P_3$的重心G的坐标为

$$G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3},\ \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$$