第九节　有理系数多项式

主要内容

- 引入
- 本原多项式
- 整系数多项式的分解定理
- 整系数多项式的有理根的求法
- 举例
- 整系数多项式不可约的条件

一、引入

求多项式$f(x)=\frac{4}{3}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{4}{3}x-2$的有理根.

$\Rightarrow$ $3f(x)=4x^4-2x^3+4x-6$ $\Rightarrow$ $\frac{3}{2}f(x)=2x^4-x^3+2x-3$

二、本原多项式

1. 定义

设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0$是一有理系数多项式.

选取适当的整数 c 乘 $f(x)$，总可以使 $cf(x)$ 是一整系数多项式.

如果 $cf(x)$ 的各项系数有公因子，就可以提出来，得到

$cf(x)=dg(x)$，也就是 $f(x)=\frac{d}{c}g(x)$ 或$g(x)=\frac{c}{d}f(x)$.

其中 $g(x)$ 是整系数多项式,且各项系数没有异于±1 的公因子.

例如 $f(x)=\frac{2}{3}x^4-2x^2-\frac{2}{5}x$ $\quad 15f(x)=10x^4-30x^2-6x$

$$\frac{15}{2}f(x)=5x^4-15x^2-3x=g(x) \qquad f(x)=\frac{2}{15}g(x)$$

定义10 如果一个非零的整系数多项式

$$g(x)=b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\dots+b_0$$

的系数 $b_n, b_{n-1}, \dots, b_0$ 没有异于 ±1 的公因子，也

也就是说，它们是互素的，它就称为一个**本原多项式**.

文山学院 WENSHAN UNIVERSITY

任何一个非零的有理系数多项式 $f(x)$ 都可以表示成一个有理数 r 与一个本原多项式 $g(x)$ 的乘积，即

$$f(x) = r\,g(x).$$

问：1.对于有理多项式 $f(x)$，若 $f(x) = r\,g(x), f(x) = r_1 g_1(x)$，$g(x)$ 与 $g_1(x)$ 是本原多项式则 $g(x)$ 与 $g_1(x)$，r 与 r_1 的关系?

2.本原多项式 $g(x)$ 一定是不可约多项式吗?

2. 性质

定理 10 (高斯(Gauss)引理)

两个本原多项式的乘积还是本原多项式.

证明 设 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$,

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \dots + b_0$$

是两个本原多项式，而

$$h(x) = f(x)\,g(x) = d_{n+m}x^{n+m} + d_{n+m-1}x^{n+m-1} + \dots + d_0$$

(反证法) 若 $h(x)$ 不是本原的，也就是说 $h(x)$ 的系数

$d_{n+m}, d_{n+m-1}, \dots, d_0$ 有一异于 ± 1 的公因子.

则就有一个素数 p 能整除$h(x)$ 的每一个系数.

因为 $f(x)$ 是本原的，所以 p不能同时整除 $f(x)$ 的每一个系数.

令 a_i 是第一个不能被 p 整除的系数，即

$p \mid a_0 , \dots , p \mid a_{i-1} , p \nmid a_i$.

同样地， $g(x)$ 也是本原的，令 b_j是第一个不能被

p 整除的系数，即 $p \mid b_0 , \dots , p \mid b_{j-1} , p \nmid b_j$.

而$h(x)$ 的系数 d_{i+j} , 由乘积的定义

$$d_{i+j} = a_0 b_{i+j} + a_1 b_{i+j-1} + a_2 b_{i+j-2} + \dots + a_i b_j$$

$$+ a_{i+1} b_{j-1} + a_{i+2} b_{j-2} + \dots + a_{i+j-2} b_2 + a_{i+j-1} b_1 + a_{i+j} b_0$$

由上面的假设，p 整除等式左端的 d_{i+j} ，p 整除右端

$a_i b_j$ 以外的每一项，但是 p 不能整除 $a_i b_j$.这是不可能的.

这就证明了， $h(x)$ 一定也是本原多项式.

证毕

三、整系数多项式的分解定理

定理 11 若一非零的整系数多项式能够分解成两个次数较低的有理系数多项式的乘积，则它一定能分解成两个次数较低的整系数多项式的乘积.

推论 设 $f(x)$, $g(x)$ 是整系数多项式，且$g(x)$ 是本原的. 如果 $f(x)=g(x)\,h(x)$ ，其中 $h(x)$是有理系数多项式，那么 $h(x)$ 一定是整系数的.

证明 设整系数多项式 $f(x)$ 有分解式

$$f(x) = g(x)\,h(x),$$

其中 $g(x)$, $h(x)$ 是有理系数多项式，且

$$\partial(g(x)) < \partial(f(x)),\quad \partial(h(x)) < \partial(f(x)).$$

令 $f(x) = a f_1(x)$，$g(x) = r g_1(x)$， $h(x) = s h_1(x)$，

这里 $f_1(x)$，$g_1(x)$， $h_1(x)$ 都是本原多项式， a 是整数，r, s 是有理数. 于是

$$a f_1(x) = rs\, g_1(x)\, h_1(x).$$

由定理10，$g_1(x)\,h_1(x)$ 是本原多项式，从而

$$rs = \pm a\,.$$

这就是说，rs 是一整数．因此，有

$$f(x) = (rs\,g_1(x))\,h_1(x)\,.$$

这里 $rs\,g_1(x)$ 与 $h_1(x)$ 都是整系数多项式，且次数都低于 $f(x)$ 的次数.

证毕

四、整系数多项式的有理根的求法

定理 12 设

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$

是一个整系数多项式，而 $\frac{r}{s}$ 是它的一个有理根，

其中 r, s 互素，那么必有 $s \mid a_n, r \mid a_0$.

特别地，若 $f(x)$ 的首项系数 $a_n = 1$，则 $f(x)$ 的有理根都是整数，而且是 a_0 的因子.

文山学院 WENSHAN UNIVERSITY

证明 因为 $\frac{r}{s}$ 是 $f(x)$ 的一个有理根．因此在有理数域上 $\left(x-\frac{r}{s}\right)\bigg| f(x)$，从而 $(sx-r)\mid f(x)$．

因为 r，s 互素，所以 $sx-r$ 是一个本原多项式.

根据推论:

$$f(x)=(sx-r)(b_{n-1}x^{n-1}+\ldots+b_0),$$

式中 $b_{n-1},\ldots,b_0$ 都是整数．比较两边系数，即得

$$a_n=sb_{n-1},\ a_0=-rb_0.$$

因此 $s\mid a_n$，$r\mid a_0$．

证毕

五、举例

例 1 求方程 $2x^4 - x^3 + 2x - 3 = 0$ 的有理根.

例 2 证明 $f(x) = x^3 - 5x + 1$ 在有理数域上不可约.

问：1.若3次整系数多项式 $f(x)$ 没有有理根，则$f(x)$在有理数域上是不是一定不可约？

2.若次数大于1次的整系数多项式 $f(x)$ 有有理根，则$f(x)$在有理数域上一定可约. 问：（1）$f(x)$在有理数域上可约，$f(x)$在有理数域上一定有有理根吗？

（2）$f(x)$在有理数域上没有有理根，$f(x)$在有理数域上是不是一定不可约？

六、整系数多项式不可约的条件

定理 13 (艾森斯坦(Eisenstein)判别法)

设 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$

是一个整系数多项式．如果有一个素数 p , 使得

1. $p \nmid a_n$;

2. $p \mid a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_0$;

3. $p^2 \nmid a_0$;

那么 $f(x)$ 在有理数域上是不可约的.

根据定理13 可知对于任意的 n，多项式

$$x^n + 2$$

在有理数域上是不可约的.

有理数域上，存在任意次数的不可约多项式,例$x^n + 2$.

小结和作业

1.请叙述本原多项式的定义、高斯引理.

2.请叙述定理11及其推论的内容.

3.定理12和定理13的内容，这两个定理的意义何在？

4.作业见学习通.