高等代数学习资料推荐

中国大学MOOC

http://www.icourse163.org/course/YCTC-1449777177#/info

教材:北京大学数学系几何与代数教研室代数小组，《高等代数》（第四版），高等教育出版社，2013.8

[1] 北京大学数学学系几何与代数教研室代数小组编，高等代数（第四版），北京 ， 高等教育出版社 ，2013.

[2] 张禾瑞、郝鈵新编，高等代数 （ 第四版 ），北京，高等教育出版社，1996

[3] 丘维声编，高等代数，北京，高等教育出版社，1996.

[4] 华南师范大学数学系代数教研室编，高等代数，广州，华南理工大学出版社 ，1994.

[5] 张均本编，高等代数习题课参考书，北京，高等教育出版社，1991.

[6] 王萼芳编，高等代数教程习题集，北京，清华大学出版社，1996.

[7] 杨子胥编，高等代数习题解，济南，山东科学技术出版社，2001.

《高等代数（1）》学习内容

第一章 多项式

第二章 行列式

第三章 线性方程组

第四章 矩阵

第一章 多项式

1 数 域

2 一元多项式

3 整除的概念

4 最大公因式

5 因式分解定理

6 重因式

7 多项式函数

8 复系数与实系数多项式的因式分解

9 有理系数多项式

第一节 数域

主要内容

小结和作业

引言

数域的定义

举例

一、引言

1. 数集：N,Z,Q,R,C. 它们之间的关系为: $N \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R \subseteq C$ **.**

若数集P中任意两个数作某一运算的结果都仍在该数集P中，就称数集P对这个运算是封闭的.

N，Z，Q，R，C这5个数集对四则运算是否封闭?

数集 运算	自然数集N	整数集Z	有理数集Q	实数集R	复数集C
加法+	√	√	√	√	√
减法−	×	√	√	√	√
乘法×	√	√	√	√	√
除法÷	×	×	√	√	√

思考?

(1)除了Q，R，C是否还有其它数集满足四则运算封闭?

(2)中学数学中因式分解要求分解到不能再分为止，“不能再分”是如何界定?

例如，多项式x^4-4在有理数集上分解为$\left(x^2-2\right)\left(x^2+2\right)$不能再分解了.

而在实数集上可以分解为$\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x^2+2\right)$.

在复数集上可以分解为$\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}i\right)\left(x+\sqrt{2}i\right)$.

因此,在数的不同的范围内，同一个问题的回答可能是不同.从而，必须明确规定所考虑的数的范围.某个范围内的数的全体构成的集合称为数集.另外，在作代数问题时，不但要考虑一些数，而且往往要对这些数作加减乘除四种运算.因此所考虑的数集还必须满足条件：其中任两个数的和差积商仍在这个集合内.

2.关于数的加、减、乘、除等运算的性质通常称为数的**代数性质**.

二、数域的定义

定义 1 设 P 是由一些复数组成的集合，其中包括 0 与 1． 如果 P 中任意两个数(这两个数也可以相同)的和、差、积、商(除数不为零)仍然是 P 中的数，那么 P 就称为一个**数域**.

数域的定义也可以说成，如果一个包含 0，1 在内的数集 P 对于加法、减法、乘法与除法(除数不为 0)是封闭的，那么 P 就称为一个数域.

三、举例

例 有理集、实数集、复数集都是数域，用Q，R，C 表示.

全体整数组成的集合是不是数域？为什么？

不是，这是因为任意两个整数的商不一定是整数.

例 1 记 $Q\left(\sqrt{2}\right)=a+b\sqrt{2}$，其中 a,b 是任何有理数.

求数集$\mathrm{Q}(\sqrt{2})$能否作成一个数域？

显然，数集$\mathrm{Q}(\sqrt{2})$, 且$\mathrm{Q}(\sqrt{2})\subset \mathrm{R}\subset \mathrm{C}$ 包含 0 与 1.

$\forall \alpha,\beta\in \mathrm{Q}\sqrt{2}$ 则，不妨设$\alpha=a+b\sqrt{2},\beta=c+d\sqrt{2}$

下证它对加减乘除法是封闭的.

$$(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})$$

$$=(ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2}.$$

因为 a, b, c, d 都是有理数，所以

$$ac+2bd,\quad ad+bc$$

也是有理数．这就是说乘积

$$(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})$$

还在 $Q(\sqrt{2})$ 内，所以 $Q(\sqrt{2})$ 对于乘法是封闭的.

设 $a+b\sqrt{2}\neq 0$，于是 $a-b\sqrt{2}\neq 0$，

若不然 $a-b\sqrt{2}=0$，从而 $\dfrac{a}{b}=\sqrt{2}$

从而这与a,b是有理数矛盾，因此 $a-b\sqrt{2}\neq 0$.

$$\frac{c+d\sqrt{2}}{a+b\sqrt{2}}=\frac{(c+d\sqrt{2})(a-b\sqrt{2})}{(a+b\sqrt{2})(a-b\sqrt{2})}=\frac{ac-2bd}{a^2-2b^2}+\frac{ad-bc}{a^2-2b^2}\sqrt{2},$$

因为 a，b，c，d 都是有理数，所以

$$\frac{ac-2bd}{a^2-2b^2},\frac{ad-bc}{a^2-2b^2}$$

也是有理数．这就证明了$Q(\sqrt{2})$对除法封闭.

例 2 所有可以表成形式

$$\frac{a_0 + a_1\pi + \cdots + a_n\pi^n}{b_0 + b_1\pi + \cdots + b_m\pi^m}$$

的数组成一数域，其中 n,m 为任意非负整数，a_i , b_j ($i = 0, 1, \ldots, n$; $j = 0, 1, \ldots, m$)是整数.

例 3 所有奇数组成的数集，能否作成一个数域？

奇数集对于乘法是封闭的，但对于加、减法不是封闭的.

$\sqrt{2}$ 的整数倍组成的所有数集，能否作成一个数域？

它对于乘除法不封闭．所以，以上两个数集都不是数域.

所有的数域都包含有理数域作为它的一部分.

设P 是一个数域，由定义，P 含有 1．根据 P 对于加法的封闭性，$1+1=2$, $2+1=3$, … , $n+1=n+1$, … 全在 P 中，换句话说，P 包含全体自然数.

又因 0 在 P 中，再由 P 对减法的封闭性，$0-n=-n$ 也在 P 中，因而 P 包含全体整数．任何一个有理数都可以表成两个整数的商，由 P 对除法的封闭性.

小结和作业

1. 判断一个数集是不是数域的条件有哪些?

2. 最小的数域是? 最大的数域是?

3. 作业见学习通.