

文山学院精品课程建设

高等代数（2）习题册

文山学院数学与工程学院 编

班级：****级数学与应用数学*班

学号：_____

姓名：_____

任课教师：_____

2019年8月修订

第五章 二次型

一、选择题

1. 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = X'AX$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 则这个二次型应是 ()
- A. $x_1^2 - x_1x_2 + 3x_1x_3 - x_3^2$ B. $x_1^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - x_3^2$
- C. $2x_1^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 2x_3^2$ D. $-x_1^2 + 2x_1x_2 - 6x_1x_3 + 2x_3^2$
2. 与二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2x_3$ 相对应的实对称矩阵是 ()
- A. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
3. 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 - 2x_1x_2 - 5x_2^2 - 6x_2x_3 + x_3^2$ 的矩阵是 ()
- A. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
4. 若二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2$, 则 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的标准形是 ()
- A. $f = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$ B. $f = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$ C. $f = y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$ D. $f = y_1^2 + y_2^2$
5. 设二次型 $f = X'AX$ 经非奇异线性变换 $X = CY$ 化为 $f = Y'BY$, 则 A 与 B ()
- A. 相等 B. 相似 C. 合同 D. 具有相同的特征值
6. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, 则与 A 合同的矩阵是 ()
- A. $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$
7. 下列命题错误的是 ()
- A. 若 A 为反对称矩阵, 则 A^2 是对称矩阵. B. 设 $A_{n \times m}$ 实矩阵则 $A'A$, AA' 都是对称矩阵.
- C. 两个 n 元实二次型等价的充要条件是它们有相同的秩.
- D. 正定矩阵的顺序主子式全大于零.

8. 下列命题不正确的是 ()
- A. 实二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 若对于任意 n 个不全为零的数 c_1, c_2, \dots, c_n 有 $f(c_1, c_2, \dots, c_n) > 0$, 则该二次型正定.
- B. n 阶实对称矩阵 A 的顺序主子式全大于 0 , 则 A 是正定矩阵.
- C. 与单位矩阵合同的矩阵是正定矩阵.
- D. 若 A, B 是两个正定矩阵, 则 AB 也是正定矩阵
9. 设 A, B 均为 n 阶实对称矩阵, 在实数域上 A 与 B 合同的充要条件是 ()
- A. A, B 有相同的秩 B. A, B 有相同的符号差
- C. A, B 有相同的秩和符号差 D. A, B 均为可逆矩阵
10. 下列结论不正确的是 ()
- A. 任意一个对称矩阵都与一个对角矩阵合同
- B. 两个同阶的复对称矩阵合同的充要条件是它们有相同的秩
- C. 一个实对称矩阵正定的充要条件是它的一切主子式都大于零
- D. 实对称矩阵 A 负定的充要条件是 $|A| < 0$
11. 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 5x_1x_2 - 3x_2x_3$ 的秩 r 和符号差 s 是 ()
- A. $r=3, s=1$ B. $r=1, s=0$ C. $r=2, s=2$ D. $r=2, s=0$
12. 下列复二次型的规范形为 $y_1^2 + y_2^2$ 的是 ()
- A. $f(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_1x_2$ B. $f(x_1, x_2, x_3) = X'AX$ (其中 $A' = A, \det A \neq 0$)
- C. $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2$ D. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_2x_3$
13. 已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ a+b & 5 & 0 \\ -1 & 0 & c \end{pmatrix}$ 是正定矩阵, 则满足条件的是 ()
- A. $a=1, b=2, c=1$ B. $a=1, b=1, c=-1$
- C. $a=3, b=-1, c=2$ D. $a=-1, b=3, c=8$
14. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 则与 A 既相似又合同的矩阵是 ()
- A. $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$
15. 下列结论中不正确的是
- A. 若 A 是正定矩阵, 则 A^{-1} 也是正定矩阵. B. 若 A, B 都是正定矩阵, 则 $A+B$ 也是正定矩阵.

25. 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2$ 的对应矩阵是_____.
26. 复数域 \mathbb{C} 上一切 n 元二次型按彼此等价来分类可以分成_____类.
27. 实数域 \mathbb{C} 上一切 n 元二次型按彼此等价来分类可以分成_____类.
28. 两个 n 元实二次型等价的充分必要条件是_____.
29. 复二次型 $q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的秩为 r , 那么它的规范形是_____.
30. 某复二次型有标准形 $2y_1^2 - 3y_2^2 + y_3^2 + 4y_4^2$, 则其规范形为_____.
31. 实对称矩阵 A 与单位矩阵合同, 则 $\det A$ _____.
32. 实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_2x_3$ 的规范形是_____.
33. 实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_3^2$ 的规范形和符号差分别是_____.
34. 二次型 $q(x_1, x_2, \dots, x_{2n}) = x_1x_2 + x_3x_4 + \dots + x_{2n-1}x_{2n}$ 的正惯性指数等于_____.
35. 二次型 $(x_1, x_2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ 的矩阵和正惯性指数分别为_____.
36. 实二次型 $q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的秩为 3, 符号差为 1, 那么它的规范形_____.
37. 已知实二次型的正惯性指数 p , 符号差 s , 则秩和负惯性指数分别为_____.
38. 已知实二次型的正惯性指数 p , 负惯性指数 q , 则秩和符号差分别为_____.

三、计算题

39. 将二次型 $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$ 化为标准形式, 并写出相应的非退化线性替换.

40. 求出二次型 $f = (-2x_1 + x_2 + x_3)^2 + 2(x_1 - 2x_2 + x_3)^2 - 3(x_1 + x_2 - 2x_3)^2$ 的标准形及相应的非退化线性替换.

41. 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 4x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3$, 用非退化线性替换把二次型 f 化为标准形, 并写出相应的非退化线性替换.

42. 用非退化线性替换将复二次型 $f = -x_1^2 - 3x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 2x_2x_3$ 化为规范形, 并写出相应的非退化线性替换.

43. 用非退化线性替换将复二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$ 化为规范形, 并写出相应的非退化线性替换.

44. 用非退化线性替换将复二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$ 化为规范形, 并写出相应的非退化线性替换.

45. 用非退化线性替换将二次型 $x_1x_{2n} + x_2x_{2n-1} + \cdots + x_nx_{n+1}$ 化为标准形. 写出所用的线性变换及变换矩阵.

46. 用非退化线性替换将实二次型 $f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$ 化为规范形, 并写出相应的非退化线性替换.

47. 用非退化线性替换将实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$ 化为规范形, 并写出相应的非退化线性替换.

48. 用非退化线性替换将实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ 化为规范形, 并写出相应的非退化线性替换.

49. 用非退化线性替换化下列二次型 $-4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ 为标准形, 并写出所作的非退化线性替换.

50. 用非退化线性替换化下列二次型 $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 4x_3^2$ 为标准形, 并写出所作的非退化线性替换.

51. 用非退化线性替换化下列二次型 $x_1^2 - 3x_2^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$ 为标准形, 并写出所作的非退化线性替换.

52. 用非退化线性替换将实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$ 化为规范形, 并写出相应的非退化线性替换.

53. 已知二次型 $f = x_1^2 + 2x_2^2 + (1-k)x_3^2 + 2kx_1x_2 + 2x_1x_3$ 正定, 求 k .

54. 判定 $f = 5x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 2x_2x_3$ 的正定性.

55. 判定 $f = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ 的正定性.

56. 确定 t 的值, 使二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2tx_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$ 正定.

57. 确定 t 的取值范围, 使得 $f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2tx_2x_3$ 正定.

58. λ 取何值时, 二次型 $2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + \lambda x_2x_3$ 是正定的.

59. λ 取何值时, 二次型 $\lambda(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 - 2x_2x_3 - 2x_3x_1 + x_4^2$ 是正定的.

60. 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + ax_2 - 2x_3)^2 + (2x_2 + 3x_3)^2 + (x_1 + 3x_2 + ax_3)^2$ 是正定二次型, 试确定参数 a .

61. t 取何值时二次型 $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2tx_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$ 为正定二次型

62. t 取何值时二次型 $t(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 - 2x_2x_3$ 为正定二次型

63. t 取何值时二次型 $x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2tx_1x_2 + 10x_1x_3 + 6x_2x_3$ 为正定二次型

64. 判断二次型 $f = \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1}$ 是否正定

65. 判断二次型 $f = \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j$ 是否正定

66. 判断二次型 $f = 2\sum_{i=1}^n x_i^2 + 2\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j$ 是否正定

67. 判断二次型 $99x_1^2 - 12x_1x_2 + 48x_1x_3 + 130x_2^2 - 60x_2x_3 + 71x_3^2$ 是否正定:

68. 判断二次型 $10x_1^2 + 8x_1x_2 + 24x_1x_3 + 2x_2^2 - 28x_2x_3 + x_3^2$ 是否正定

69. 求 λ 的值, 使二次型 $f(x, y, z, w) = \lambda(x^2 + y^2 + z^2) + 2xy - 2yz + 2xz + w^2$ 为正定.

70. 用可逆线性替换将二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$ 化为标准形. 写出所用的线性变换及变换矩阵, 并求出 f 的正惯性指数与符号差.

71. 确定实二次型 $f = x_1x_2 + x_3x_4 + \cdots + x_{2n-1}x_{2n}$ 的秩和符号差.

72. 确定实二次型 $x_1x_{2n} + x_2x_{2n-1} + \cdots + x_nx_{n+1}$ 的秩和符号差.

73. 求二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = -5x_1^2 - 6x_2^2 - 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3$ 的秩与符号差.

74. 求二次型 $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + 5x_1x_2 - 3x_2x_3$ 的秩与符号差.

75. 求二次型 $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4$ 的秩与符号差.

76. 求二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_{2n}) = x_1x_2 + 2x_3x_4 + 3x_5x_6 + 4x_7x_8 + \dots + nx_{2n-1}x_{2n}$ 的秩与符号差

四、证明题

77. 证明: 设方阵 A_1 与 B_1 合同, A_2 与 B_2 合同, 证明 $\begin{pmatrix} A_1 & \\ & A_2 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} B_1 & \\ & B_2 \end{pmatrix}$ 合同.

78. 设 A 对称, B 与 A 合同, 则 B 对称.

79. 设 A 正定, P 可逆, 则 $P'AP$ 正定.

80. 设 A 正定, B 为半正定, 则 $A+B$ 正定.

81. 如果 A, B 都是 n 级正定矩阵, 那么 $A+B$ 也是正定矩阵.

82. 证明: 如果 A 是正定矩阵, 那么 A^{-1} 也是正定矩阵.

83. 证明, 如果 A 是 n 级实可逆矩阵, 那么 AA' 是正定矩阵.

84. 证明: 如果 A 是正定矩阵, 那么 $kA, (k > 0)$ 也是正定矩阵.

85. 证明: 证明: 如果 A 是正定矩阵, 那么 A 的伴随矩阵 A^* 也是正定矩阵.

86. 证明: 如果 A 是正定矩阵, 那么 A^2 也是正定矩阵.

87. 证明：秩等于 r 的对称矩阵可表示成 r 个秩为 1 对称矩阵和。

88. 证明： $\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ 与 $\text{diag}(\lambda_{i_1}, \lambda_{i_2}, \dots, \lambda_{i_n})$ 合同，其中 $i_1 i_2 \dots i_n$ 是 $1, 2, \dots, n$ 的一个排列。

89. 设 A 是一个 n 阶矩阵，证明： A 是反对称矩阵当且仅当对任一个 n 维向量 X ，有 $X'AX = 0$ 。

90. 设 A 是一个 n 阶矩阵，证明：如果 A 是对称矩阵，且对任一个 n 维向量 X 有 $X'AX = 0$ ，那么 $A = 0$ 。

91. 证明：一个实二次型可以分解成两个实系数的一次齐次多项式的乘积的充分必要条件是：它的秩等于 2 且符号差等于 0，或者秩等于 1。

92. 证明：如果 A 是正定矩阵，那么 A 的主子式全大于零. 所谓主子式，就是行指标与列指标相同的子式.

93. 设 A 为一个 n 级实对称矩阵，且 $|A| < 0$ ，证明：必存在实 n 维向量 $X \neq 0$ ，使 $X'AX < 0$.

94. 证明：二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是半正定的充分必要条件是它的正惯性指数与秩相等.

95. 证明： $n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2$ 是半正定的.

96. 设 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = X'AX$ 是一实二次型，若有实 n 维向量 X_1, X_2 使

$X_1'AX_1 > 0, X_2'AX_2 < 0$. 证明：必存在实 n 维向量 $X_0 \neq 0$ 使 $X_0'AX_0 = 0$.

97. A 是一个实矩阵, 证明: $\text{rank}(A'A) = \text{rank}(A)$.

98. 设 A 是 n 阶对称矩阵, A 的秩是 r . 证明: 存在秩为 $n-r$ 的对称矩阵 B , 使 $AB = 0$.

99. 证明: E 与 $-E$ 在复数域上合同, 但在实数域上不合同.

100. 证明: 实二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是半正定是充分必要条件是存在可逆实矩阵 C 使 $C'AC = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ 其中 $d_i \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$

101. 实对称矩阵 A 半正定的充分必要条件是存在实方阵 Q 使 $A = Q'Q$.

102. 设 A 是实对称矩阵, 证明: 当实数 t 充分大之后, $tE + A$ 是正定矩阵.

第六章 线性空间

一、选择题

103. 设 V_1, V_2 是线性空间 V 的子空间, 且 $\dim(V_1) = s, \dim(V_2) = t, \dim(V_1 + V_2) = r$, 则 ()
- A. $r < s+t$ B. $r = s+t$ C. $r \leq s+t$ D. $r = s \cdot t$
104. 向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n (n \geq 2)$ 线性相关的充要条件是 ()
- A. 其中必含有零向量 B. 其中每个向量都是其余向量的线性组合
C. 每个部分组都线性相关 D. 其中存在一个向量是其余向量的线性组合
105. 在 R^3 中, ξ 关于基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的坐标是 (x_1, x_2, x_3) , 则 ξ 关于基 $\alpha_1, 2\alpha_2, 3\alpha_3$ 的坐标是 ()
- A. (x_1, x_2, x_3) B. $(x_1, 2x_2, 3x_3)$ C. $(x_1, \frac{1}{2}x_2, \frac{1}{3}x_3)$ D. $(\frac{1}{3}x_1, \frac{1}{2}x_2, x_3)$
106. 数域 F 上全体二阶矩阵关于矩阵的加法和数与矩阵的乘法所成的线性空间 $M_2(F)$ 中, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 关于基 $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ 的坐标是 ()
- A. (a, b, c, d) B. $(a, b, c, 2d)$ C. $(a, b, c, \frac{1}{2}d)$ D. $(a, b, \frac{1}{2}c, \frac{1}{2}d)$
107. 在 R^3 的下列子集中, 作成 R^3 的子空间的是 ()
- A. $\{(a_1, a_2, a_3) \mid a_1, a_2, a_3 \in R, a_1 + a_2 + a_3 = 1\}$ B. $\{(a_1, 0, a_3) \mid a_1, a_3 \in R\}$
C. $\{(a_1, a_2, a_3) \mid a_1, a_2, a_3 \text{ 为整数}\}$ D. $\{(a_1, a_2, a_3) \mid a_1, a_2, a_3 \text{ 为自然数}\}$
108. 设矩阵 A 是 n 维线性空间 V 中由基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 的过渡矩阵, 则 A 的第 j 列是 ()
- A. α_j 关于基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 的坐标 B. α_j 关于基 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 的坐标
C. β_j 关于基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 的坐标 D. β_j 关于基 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 的坐标
109. 数域 F 上的 4 阶矩阵组成的线性空间 V 中, V 的维数等于 ()
- A. 4 B. 16 C. 12 D. 10
110. 数域 F 上的线性空间 F^3 中, 令 $V_1 = \{(0, 0, x) \mid x \in F, \text{且 } x \neq 0\}$,
 $V_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_i \in F, \text{且 } x_3 = x_1 + x_2\}$, 则 ()
- A. V_1 是子空间 B. V_2 是子空间 C. V_1 与 V_2 都是子空间 D. V_1 与 V_2 都不是子空间
111. 数域 F 上全体 3 阶对称矩阵关于矩阵的加法及数与矩阵的乘法作成的线性空间的维数是 ()
- A. 9 B. 6 C. 4 D. 3

112. 下列命题错误的是 ()
- A. n 维线性空间中任意 $n+2$ 个向量一定线性相关 B. 相似矩阵具有相同的特征多项式
 C. 两个 n 元实二次型等价的充要条件是它们有相同的秩 D. 正定矩阵的特征根全大于零

113. 数域 F 上的 3 维线性空间 $F_2[x] = \{ax^2 + bx + c | a, b, c \in F\}$ 中, 从基 $1, x^2, x$ 到基 $x^2, x+1, 2$ 的过渡矩阵是 ()

A. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

114. 若向量组中含有零向量, 则此向量组 ()
- A. 线性相关; B. 线性无关; C. 线性相关或线性无关; D. 不一定

115. 设 α 为任意非零向量, 则 α ()
- A. 线性相关; B. 线性无关; C. 线性相关或线性无关; D. 不一定

116. n 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, β 为一 n 维向量, 则 ()
- A. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta$ 线性相关; B. β 一定能被 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表出;

C. β 一定不能被 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表出; D. 当 $s=n$ 时, β 一定能被 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表出

117. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 线性相关, 则 ()
- A. α_1 必可由 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表示; B. α_4 必可由 α_2, α_3 线性表示;
- C. α_4 必可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示; D. α_4 必不可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示

118. 已知 $5(1, 0, -1) - 3\alpha - (1, 0, 2) = (2, -3, -1)$ 则 α 等于 ()
- A. $(2/3, 1, -2)$ B. $(-2/3, 1, -2)$ C. $(1, 2/3, -2)$ D. $(1, 1, -2/3)$.

119. 下列集合中, 是 R^3 的子空间的为 ()

A. $\{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 | x_3 \geq 0\}$ B. $\{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 | x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0\}$

C. $\{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 | x_3 = 1\}$ D. $\{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 | x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1\}$

120. R^3 中下列子集中, 不是 R^3 的子空间的为 ()

A. $W_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 | x_2 = 1\}$ B. $W_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 | x_3 = 0\}$

C. $W_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 | x_1 = x_2 = x_3\}$ D. $W_4 = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 | x_1 = x_2 - x_3\}$

二、填空题

121. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是线性空间 V 的一个基, 则由这个基到基 $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n, \alpha_1$ 的过渡矩阵是__.

122. 设 V 是 n 维线性空间, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 是 V 中的向量, 且 $s > n$, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的线性相关性是_____.

123. 向量组 $\alpha_1 = (1, 2, 3), \alpha_2 = (-1, 0, 1), \alpha_3 = (0, 2, 4)$ 所生成的空间 $L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 的维数是_____.

124. 次数等于 n ($n \geq 1$) 的实系数多项式的全体, 对于多项式的加法和数量乘法_____实数域上的线性空间

125. 数域 F 上线性空间 $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in F \right\}$ 中每个基所含向量的个数都等于_____.

126. 若向量 $\alpha_1 = (-1, 2, 0), \alpha_2 = (t, 1, 0), \alpha_3 = (1, 0, -1)$ 线性相关, 则 $t =$ _____.

127. 如果 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是线性空间 V 的一组基, 则基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到基 $\alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1$ 的过渡矩阵

是 $\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$.

128. $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$ 在基 $f_1(x) = 2, f_2(x) = x + 3, f_3(x) = x^2 + x + 4$ 下的坐标是_____.

129. 在实函数空间中, $1, \cos^2 t, \cos 2t$ 的线性相关性是_____.

130. 设 $\alpha_1 = (2, -3, 1), \alpha_2 = (1, 4, 2), \alpha_3 = (5, -2, 4) \in R^3$, 则子空间 $L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 的维数是_____.

131. 全体正实数的集合 R^+ , 对加法和纯量乘法 $a \oplus b = ab, k \circ a = a^k$ 构成 R 上的线性空间, 则此空间的零向量为_____.

132. 全体正实数的集合 R^+ , 对加法和纯量乘法 $a \oplus b = ab, k \circ a = a^k$ 构成 R 上的线性空间, 则 $a \in R^+$ 的负向量为_____.

133. 数域 P 上一切次数 $\leq n$ 的多项式添加零多项式构成的线性空间 $P_n[x]$ 维数等于_____.

134. 复数域 C 作为实数域 R 上的线性空间, 维数等于_____, 它的一个基为_____.

135. 复数域 C 作为它自身上的线性空间, 维数等于_____, 它的一个基为_____.

136. R 上的全体 n 阶上三角形矩阵, 对矩阵的加法和纯量乘法作成线性空间, 其维数=_____.

137. 数域 P 上任一 n 维线性空间 V 都与线性空间_____同构.

138. 设 V 的子空间 W_1, W_2, W_3 有 $W_1 \cap W_2 = W_1 \cap W_3 = W_2 \cap W_3 = \{0\}$, 则 $W_1 + W_2 + W_3$ _____直和.

三、计算题

139. 在 F^3 中, 求由基 $\alpha_1 = (1, 2, -1), \alpha_2 = (1, -1, 1), \alpha_3 = (-1, 2, 1)$ 到基 $\beta_1 = (2, 1, 0), \beta_2 = (0, 1, 2),$

$\beta_3 = (-2, 1, 1)$ 的过渡矩阵.

140. 在 F^3 中, 求由基 $\beta_1 = (2, 1, 0), \beta_2 = (0, 1, 2), \beta_3 = (-2, 1, 1)$ 到基 $\alpha_1 = (1, 2, -1), \alpha_2 = (1, -1, 1), \alpha_3 = (-1, 2, 1)$ 的过渡矩阵.

141. 在 R^3 中求基 $\alpha_1 = (1, 0, 1), \alpha_2 = (1, 1, -1), \alpha_3 = (1, -1, 1)$ 到基 $\beta_1 = (3, 0, 1), \beta_2 = (2, 0, 0), \beta_3 = (0, 2, -2)$ 的过渡矩阵.

142. 已知 R^3 的一个基为 $\alpha_1 = (1, 1, 0), \alpha_2 = (0, 0, 2), \alpha_3 = (0, 3, 2)$. 求向量 $\xi = (5, 8, -2)$ 关于这个基的坐标.

143. 在 F^4 中, 求向量 $\xi = (1, 2, 1, 1)$ 关于基 $\alpha_1 = (1, 1, 1, 1), \alpha_2 = (1, 1, -1, -1), \alpha_3 = (1, -1, 1, -1), \alpha_4 = (1, -1, -1, 1)$ 的坐标.

144. 在 F^4 中, 求向量 $\xi = (0, 0, 0, 1)$ 关于基 $\alpha_1 = (1, 1, 0, 1), \alpha_2 = (2, 1, 3, 1), \alpha_3 = (1, 1, 0, 0), \alpha_4 = (0, 1, -1, -1)$ 的坐标.

145. 在 F^3 中, 求向量 $\xi = (1, 0, 0, 1)$ 关于基 $\alpha_1 = (1, 1, 0, 1), \alpha_2 = (2, 1, 3, 1), \alpha_3 = (1, 1, 0, 0), \alpha_4 = (0, 1, -1, -1)$ 的坐标.

146. 在 F^3 中, 求向量 $\xi = (1,1,1)$ 关于基 $\alpha_1 = (1,1,0,1), \alpha_2 = (2,1,3,1), \alpha_3 = (1,1,0,0)$

$\alpha_4 = (0,1,-1,-1)$ 的坐标.

147. 在 $F_3[x]$ (数域 F 上一切次数 ≤ 3 的多项式及零多项式) 中, 求多项式 $x^2 + 2x + 3$ 关于基

$\{x^3, x^3 + x, x^2 + 1, x + 1\}$ 的坐标.

148. 在 $F_3[x]$ (数域 F 上一切次数 ≤ 3 的多项式及零多项式) 中, 求多项式 x^2 关于基

$\{x^3, x^3 + x, x^2 + 1, x + 1\}$ 的坐标.

149. 证明: $x^2 + x, x^2 - x, x + 1$ 是 $F_2[x]$ 的一个基, 并求 $2x^2 + 7x + 3$ 关于这个基的坐标.

150. 在 $F_3[x]$ (数域 F 上一切次数 ≤ 3 的多项式及零多项式) 中, 求多项式 $2x + 3$ 关于基

$\{x^3, x^3 + x, x^2 + 1, x + 1\}$ 的坐标.

151. 设 (x_1, x_2, x_3, x_4) 为向量 ξ 关于基 $\alpha_1 = (1, 0, 0, 1), \alpha_2 = (0, 2, 1, 0), \alpha_3 = (0, 0, 1, 1), \alpha_4 = (0, 0, 2, 1)$ 的坐标; (y_1, y_2, y_3, y_4) 是 ξ 关于基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 的坐标, 其中 $y_1 = x_1, y_2 = x_2 - x_1, y_3 = x_3 - x_2, y_4 = x_4 - x_2$ 求基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$.

152. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 3 维线性空间 V 的一个基, $\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ 也是 V 的一个基, 又若向量 ξ 关于前一个基的坐标为 $(3, 2, 1)$, 求 ξ 关于后一个基的坐标.

153. 求下列子空间的维数.

1) $L((2, -3, 1), (1, 4, 2), (5, -2, 4)) \subseteq R^3$; 2)

154. 求下列线性空间的维数和一组基: 1) 数域 P 上的空间 $P^{n \times n}$; 2) 数域 P 上的空间 $P^{m \times n}$.

155.求下列线性空间的维数和一组基：1) $\mathbf{P}^{n \times n}$ 中全体对称矩阵作成的数域 \mathbf{P} 上的空间； 2) $\mathbf{P}^{n \times n}$ 中全体反对称矩阵作成的数域 \mathbf{P} 上的空间.

156.求下列线性空间的维数和一组基：1) $\mathbf{P}^{n \times n}$ 中全体上三角矩阵作成的数域 \mathbf{P} 上的空间.

157.全体正实数 R^+ 关于以下定义加法与数量乘法构成实数域 R 上的线性空间， $a \oplus b = ab$ ， $k \circ a = a^k$ ，求 R^+ 的维数和一组基.

158.求下列线性空间的维数和一组基：实数域上由矩阵 A 的全体实系数多项式组成的空间,其

$$\text{中 } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix}, \quad \omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}.$$

159.求下列线性空间的维数和一组基：实数域上由矩阵 A 的全体实系数多项式组成的空间,其

$$\text{中 } A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

160.在 P^4 中,求由基 $\varepsilon_1 = (1,0,0,0), \varepsilon_2 = (0,1,0,0), \varepsilon_3 = (0,0,1,0), \varepsilon_4 = (0,0,0,1)$ 到基

$\eta_1 = (2,1,-1,1), \eta_2 = (0,3,1,0), \eta_3 = (5,3,2,1), \eta_4 = (6,6,1,3)$ 的过渡矩阵,并求向量 $\xi = (1,1,0,0)$ 在基

$\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 下的坐标.

161. 在 P^4 中, 求由基 $\varepsilon_1 = (1, 2, -1, 0), \varepsilon_2 = (1, -1, 1, 1), \varepsilon_3 = (-1, 2, 1, 1), \varepsilon_4 = (-1, -1, 0, 1)$ 到基 $\eta_1 = (2, 1, 0, 1), \eta_2 = (0, 1, 2, 2), \eta_3 = (-2, 1, 1, 2), \eta_4 = (1, 3, 1, 2)$ 的过渡矩阵, 并求向量 $\xi = (1, 0, 0, 0)$ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 下的坐标

162. 已知 α 关于基 $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ 的坐标为 $(1, 0, 2)$, 由基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 到基 $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ 的过渡矩

阵为 $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 求 α 关于基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 的坐标.

163. 在 P^4 中取两组基 $\varepsilon_1 = (1, 0, 0, 0), \varepsilon_2 = (0, 1, 0, 0), \varepsilon_3 = (0, 0, 1, 0), \varepsilon_4 = (0, 0, 0, 1)$, $\eta_1 = (2, 1, -1, 1), \eta_2 = (0, 3, 1, 0), \eta_3 = (5, 3, 2, 1), \eta_4 = (6, 6, 1, 3)$, 求一非零向量 ξ , 使它在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 与 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 下有相同的坐标.

164. 在 P^4 中取两组基 $\varepsilon_1 = (1,0,0,0), \varepsilon_2 = (0,1,0,0), \varepsilon_3 = (0,0,1,0), \varepsilon_4 = (0,0,0,1)$,
 $\eta_1 = (1,1,1,1), \eta_2 = (0,1,1,1), \eta_3 = (0,0,1,1), \eta_4 = (0,0,0,1)$, 求一非零向量 ξ , 使它在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$
 与 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 下有相同的坐标.

165. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, 求 $P^{3 \times 3}$ 中全体与 A 可交换的矩阵所成的子空间的维数和一组基.

166. 在 P^4 中, 求由向量 $\alpha_1 = (2,1,3,-1), \alpha_2 = (4,5,3,-1), \alpha_3 = (-1,1,-3,1), \alpha_4 = (1,5,-3,1)$ 生成的子空间的一个基和维数.

167. 在 P^4 中, 求向量组 $\alpha_1 = (2, 1, 3, 1), \alpha_2 = (1, 2, 0, 1), \alpha_3 = (-1, 1, -3, 0), \alpha_4 = (1, 1, 1, 1)$ 生成的子空间的基与维数.

168. 在 P^4 中求出向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ 的一个极大无关组, 然后用它表出剩余的向量. 这里

$$\alpha_1 = (2, 1, 3, 1), \alpha_2 = (1, 2, 0, 1), \alpha_3 = -(1, 1, 3, 1), \alpha_4 = (1, 1, 1, 1), \alpha_5 = (0, 12, -12, 5)$$

169. 由向量 $\alpha_1 = (2, 1, 3, -1), \alpha_2 = (4, 5, 3, -1)$ 出发, 将其扩充为 P^4 的一个基.

170. 由向量 $\alpha_1 = (4, 5, 3, -1), \alpha_2 = (-1, 1, -3, 1)$ 出发, 将其扩充为 P^4 的一个基.

171. 取 R^4 的两个向量 $\alpha_1 = (1, 0, 1, 0)$, $\alpha_2 = (1, -1, 2, 0)$. 求 R^4 的一个含 α_1, α_2 的基.

172. 在 P^4 中, 由齐次方程组
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 - 13x_3 + 11x_4 = 0 \end{cases}$$
 确定的解空间的基与维数.

173. 求由向量 α_1, α_2 生成的子空间与由向量 β_1, β_2 生成的子空间的交的基与维数, 设

$$\alpha_1 = (1, 2, 1, 0), \alpha_2 = (-1, 1, 1, 1); \beta_1 = (2, -1, 0, 1), \beta_2 = (1, -1, 3, 7).$$

174. 求由向量 α_1, α_2 生成的子空间与由向量 β_1, β_2 生成的子空间的交的基与维数, 设

$$\alpha_1 = (1, 1, 0, 0), \alpha_2 = (1, 0, 1, 1); \beta_1 = (0, 0, 1, 1), \beta_2 = (0, 1, 1, 0).$$

175. 求由向量 α_1, α_2 生成的子空间与由向量 β_1, β_2 生成的子空间的交的基与维数, 设

$$\alpha_1 = (1, 2, -1, -2), \alpha_2 = (3, 1, 1, 1), \alpha_3 = (-1, 0, 1, -1); \beta_1 = (2, 5, -6, -5), \beta_2 = (-1, 2, -7, 3).$$

176. 已知 $W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in R \right\}$, $W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{pmatrix} \mid a_1, c_1 \in R \right\}$, 是 $M_2(R)$ 的两个子空间, 求

$W_1 \cap W_2, W_1 + W_2$ 的一个基和维数.

四、证明题

177. 证明: 全体正实数 R^+ 的关于以下定义的正实数域上的线性空

间. $a \oplus b = ab, k \circ a = a^k$.

178. 设 $A \in P^{n \times n}$, 证明与 A 可交换的矩阵组成 $P^{n \times n}$ 的一子空间记作 $C(A)$.

179. 设 W_1, W_2 为线性空间 V 的两个子空间. 1) 证明: $W_1 \cap W_2$ 是 V 的子空间. 2) $W_1 \cup W_2$ 是否构成 V 的子空间, 说明理由.

180. 设 W_1, W_2 为线性空间 V 的两个子空间. 证明: $W_1 + W_2$ 是 V 的即含 W_1 又含 W_2 的最小子空间.

181. 设 A 是任一 $m \times n$ 矩阵, 将 A 任意分块成 $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_s \end{pmatrix}$, 证明: n 元齐次线性方程组 $AX = 0$ 的

解空间 V 是齐线性方程组 $A_i x = 0$ 的解空间 V_i 的交, $i = 1, 2, \dots, s$.

182. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关, 向量 β_1 可由它线性表示, 而向量 β_2 不能由它线性表示. 证明: $m+1$ 个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta_1 + \beta_2$ 必线性无关.

183. 设 W_1, W_2 为线性空间 V 的两个子空间. α, β 是 V 的两个向量, 其中 $\alpha \in W_2$, 但 $\alpha \notin W_1$, 又 $\beta \notin W_2$. 证明: 1) 对任意 $k \in F, \beta + k\alpha \notin W_2$; 2) 至多有一个 $k \in F$, 使得 $\beta + k\alpha \in W_1$.

184. 设 W_1, W_2 为线性空间 V 的两个子空间. 证明 若 $W_1 + W_2 = W_1 \cup W_2$, 则 $W_1 \subseteq W_2$ 或 $W_2 \subseteq W_1$.

185. 证明: n 维线性空间 V 中, 任意 n 个线性无关的向量都可作为 V 的一个基.

186. 设 a_1, a_2, \dots, a_n 是数域 F 中 n 个不同的数, 且 $f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n)$. 证明多项式组

$$f_i(x) = \frac{f(x)}{(x - a_i)} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$
 是线性空间 $F_{n-1}[x]$ 的一个基.

187. 设 V_1, V_2 都是线性空间 V 的子空间, 且 $V_1 \subset V_2$, 证明: 如果 V_1 的维数与 V_2 的维数相等, 那么 $V_1 = V_2$.

188. 设 V_1 与 V_2 分别是齐次方程组 $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0, x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = x_n$ 的解空间, 证明:

$$P^n = V_1 \oplus V_2.$$

189. 证明: 如果 $V = V_1 + V_2, V_1 = V_{11} \oplus V_{12}$, 那么 $V = V_{11} \oplus V_{12} \oplus V_2$.

190.证明: 每一个 n 维线性空间都可以表示成 n 个一维子空间的直和.

191.证明: 和 $\sum_{i=1}^s V_i$ 是直和的充分必要条件是 $V_i \cap \sum_{j=1}^{i-1} V_j = \{0\} (i = 2, \dots, s)$.

192.证明: 若数域 F 上的线性空间 V 含有一个非零向量, 则 V 必含有无穷多个非零向量.

193.设 $S = \{A \in M_n(F) \mid A' = A\}$, $T = \{A \in M_n(F) \mid A' = -A\}$ 证明 S, T 都是 $M_n(F)$ 的子空间, 并且 $M_n(F) = S + T$, $S \cap T = \{0\}$.

194. 设 W 是线性空间 V 的子空间, 证明: $\dim W = \dim V$ 的充分必要条件是 $W = V$.

195. 设 W_1, W_2 都是线性空间 V 的子空间, 证明: $W_1 + W_2 = W_1 \cup W_2$ 的充分必要条件是 $W_1 \subseteq W_2$ 或者 $W_2 \subseteq W_1$.

196. 设 W_1, W_2 都是线性空间 V 的子空间, 如果 V 的子空间 W 既包含 W_1 , 又包含 W_2 , 则 W 一定包含 $W_1 + W_2$.

197. 证明, 任一有限维线性空间不能与它的真子空间同构.

198.证明 数域 F 上两个有限维线性空间同构的充分必要条件是它们维数相等.

199.证明 $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in R \right\}$ 是实数域 R 的线性空间. 并求 V 的基和维数.

200. 设 $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in R \right\}$ $W = \{(d, e, f) \mid d, e, f \in R\}$ 都是实数域 R 的线性空间. 证明 V 与 W 同构

201. 设 W 是 R^n 的一个非零子空间, 而对于 W 的每一个向量 (a_1, a_2, \dots, a_n) 来说, 或者 $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$, 或者每一个 a_i 都不等于零. 证明: $\dim W = 1$.

202.若 W_1, W_2, W_3 都是 V 的子空间, 求证 $W_1 \cap ((W_1 \cap W_2) + W_3) = (W_1 \cap W_2) + (W_1 \cap W_3)$.

203.设 W_1, W_2, \dots, W_s 是 n 维线性空间 V 的子空间. 如果 $W_1 + W_2 + \dots + W_s$ 为直和. 证明:

$$W_i \cap W_j = \{0\}, i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, s.$$

204.设 $f: V \rightarrow W$ 是数域 F 上线性空间 V 到 W 的一个同构映射, V_1 是 V 的一个子空间. 证明:

$f(V_1)$ 是 W 的一个子空间.

205.设 $f: V \rightarrow W$ 是数域 F 上线性空间 V 到 W 的一个同构映射, 则 V_1 中的向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关的充分必要条件是 $f(\alpha_1), f(\alpha_2), \dots, f(\alpha_m)$ 线性相关.

206. 设 $f: V \rightarrow W$ 是数域 F 上线性空间 V 到 W 的一个同构映射, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 是 V 的基的充分必要条件是 $f(\alpha_1), f(\alpha_2), \dots, f(\alpha_m)$ 是 W 的基.

第七章 线性变换

一、选择题

207. 线性空间 R^3 的如下变换 σ 中, 为线性变换的是 ()

A. $\sigma(x_1, x_2, x_3) = (|x_1|, 1, 1)$ B. $\sigma(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 1, x_2, x_3)$

C. $\sigma(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_3, 0)$ D. $\sigma(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2, x_2^2, x_3^2)$

208. 设 $\xi = (x_1, x_2, x_3)$ 是 R^3 的任意向量, 下列映射 σ 是 R^3 的线性变换的是 ()

A. $\sigma(\xi) = (x_1, x_2, x_3 x_1)$ B. $\sigma(\xi) = (\cos x_1, \sin x_2, x_3)$

C. $\sigma(\xi) = (x_1^2, x_2^2, -x_3)$ D. $\sigma(\xi) = (2x_1 + x_2, x_2 - x_3, -x_3)$

209. 设线性变换 σ 在基 α_1, α_2 下的矩阵是 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, 则 σ 在 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2$ 下的矩阵是 ()

A. $\begin{pmatrix} a+b & a \\ c+d & c \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} c+d & c \\ a-c+b-d & a-c \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} a+b & c+d \\ a & b \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} a+b & b \\ c+d-a-b & d-b \end{pmatrix}$

210. 设 σ, τ 都是线性空间 V 的线性变换, 下列各式中正确的是 ()

A. $(\sigma\tau)^m = \sigma^m \tau^m$ B. $(\sigma - \tau)(\sigma + \tau) = \sigma^2 - \tau^2$ C. $(\sigma^2)^4 = \sigma^6$ D. $(\sigma^2)^4 = \sigma^8$

211. 下列命题错误的是 ()

A. n 维线性空间中 $n+2$ 个向量一定线性相关 B. 相似矩阵具有相同的特征多项式

C. 线性变换的乘法满足交换律 D. 线性变换的加法满足交换律

212. 设数域 F 上 n 维线性空间 V 的一个线性变换 σ 关于一个基的矩阵是 A , 则 A 与对角形矩阵相似的充要条件是 ()

A. σ 有 n 个不同的特征值 B. σ 有 n 个线性无关的特征向量

C. σ 的特征值都在 F 中 D. 对于 σ 的特征值 λ , 秩 $(\lambda I - A) = n - s$ (s 是 λ 的重数)

213. 下列结论不正确的是 ()

A. 秩相等的同阶矩阵是相似的 B. 实对称矩阵必与对角形矩阵相似

C. 特征根不为零的矩阵是可逆矩阵 D. 若 a 是可逆矩阵 A 的特征根, 则 a^{-1} 是 A^{-1} 的特征根.

214. 若 α_1, α_2 是齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$ 的两个不同的解向量, 则下列向量中, 必是矩阵

A 的对应于特征值 λ 的特征向量的是 ()

A. α_1 B. $k\alpha_2 (k \neq 0)$ C. $\alpha_1 + \alpha_2$ D. $\alpha_1 - \alpha_2$

215. n 维线性空间 V 的零变换 θ 的象及核的维数分别是 ()
 A. $0, n$ B. $n, 0$ C. $0, 0$ D. n, n
216. n 线性空间 V 的单位变换 1 的象及核的维数分别是 ()
 A. $1, n-1$ B. $n-1, 1$ C. $n, 0$ D. $0, n$
217. “有相同的特征多项式” 是两个矩阵相似的 ()
 A. 充分条件 B. 必要条件 C. 充分必要条件 D. 以上都不对
218. n 阶方正 A 具有 n 不同的特征值是 A 与对角矩阵相似的 ()
 A. 充分必要条件 B. 充分而非必要条件
 C. 必要而非充分条件 D. 既非充分也非必要条件
219. “有 n 个线性无关的特征向量” 是 n 维线性空间的线性变换可对角化的 ()
 A. 充分必要条件 B. 充分而非必要条件
 C. 必要而非充分条件 D. 既非充分也非必要条件
220. 对于数域 F 上线性空间 V 的数乘变换来说 ()
 A. 只有一个不变子空间 B. 每个子空间都是不变子空间
 C. 不存在不变子空间 D. 存在且有有限个不变子空间
221. n 阶方阵 A 具有 n 个不同的特征值是 A 与对角阵相似的 ()
 A. 充要条件 B. 充分非必要条件 C. 必要非充分条件 D. 既非充分也非必要条件

二、填空题

222. 实对称矩阵 A 的特征根全为 1 , 则 $\det A =$ _____.
223. 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ 中, 能与对角形矩阵相似的是_____.
224. 设线性空间 V 的可逆线性变换 σ 关于某个基的矩阵是 A , k 是非零数, 则 $(k\sigma)^{-1}$ 关于这个基的矩阵是_____.
225. 线性变换 σ 关于数域 F 上 n 维线性空间 V 的某个基的矩阵是对角形矩阵的充要条件是 σ 有_____特征向量.
226. 线性空间 R^2 的两个线性变换 σ, τ 为 $\sigma(x_1, x_2) = (x_1, x_2 - x_1)$, $\tau(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, x_2)$ 则 $(\sigma\tau - \sigma^2)(x_1, x_2) =$ _____.
227. 设 V 和 W 是数域 F 上的线性空间, 而 $\sigma: V \rightarrow W$ 是一个线性映射, 那么 σ 是单射的充要条件是_____.
228. 设 V 和 W 是数域 F 上的线性空间, 而 $\sigma: V \rightarrow W$ 是一个线性映射, 那么 σ 是满射的充要条件是_____.
229. 线性空间 V 的任意线性变换 σ , 都有 $\sigma(0) =$ _____, $\sigma(-\alpha) =$ _____.

230. σ 是 n 维线性空间 V 的一个数乘变换: $\sigma(\xi) = k\xi$ 那么 σ 关于 V 的任意基的矩阵是_____.

231. 在 P^3 中的线性变换 $\sigma(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2, x_2 + x_3, x_1)$, 那么 σ 关于基 $\varepsilon_1 = (1, 0, 0), \varepsilon_2 = (0, 1, 0), \varepsilon_3 = (0, 0, 1)$ 的矩阵是_____.

232. 方程组 $(\lambda_0 I - A)X = 0$ 的_____都是 A 的属于 λ_0 的特征向量.

233. 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, 则与矩阵 A 相似的任何矩阵 B 的特征根是_____.

234. A 相似于单位矩阵, 则 A 的行列式 = _____.

235. 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ 的特征值是_____.

236. 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ 的特征值是_____.

237. 设 A 为 3 阶方阵, 其特征值为 3, -1, 2, 则 $|A| =$ _____.

238. A 满足 $A^2 + 2A + I = 0$, 则 A 有特征值_____.

239. 设 3 阶矩阵 A 的元素全为 1, 则 A 的 3 个特征值是_____.

240. 若线性变换 σ 关于基 α_1, α_2 的矩阵为 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, 则 σ 关于基 $3\alpha_1, \alpha_2$ 的矩阵为_____.

三、计算题

241. 设线性变换 σ 关于基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的矩阵是 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$, 向量 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, 求 $\sigma(\beta)$

关于基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的坐标.

242. 设线性变换 σ 关于基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的矩阵是 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$, 向量 $\beta = \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3$, 求 $\sigma(\beta)$

关于基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的坐标.

243. 在 P^2 中, 线性变换 σ 把基 $\alpha_1 = (3, 1), \alpha_2 = (1, 1)$ 分别变为 $(2, -4), (0, 2)$, 试求 $\sigma(7, 4)$.

244. 设线性变换 $\sigma(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_2, x_3)$, 向量 $\beta = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3$.

(1) 求线性变换 σ 关于基 $\eta_1 = (1, 0, 0)$, $\eta_2 = (0, 1, 0)$, $\eta_3 = (0, 0, 1)$ 的矩阵 A .

(2)求 $\sigma(\beta)$ 关于基 η_1, η_2, η_3 的坐标.

245.求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ 的特征根和相应的特征向量.

246.设 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix}$, 求可逆矩阵 T , 使 $T^{-1}AT$ 是对角形矩阵.

247.矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 求一可逆矩阵 P , 使 $P^{-1}AP$ 为对角形.

248. 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, 求一可逆矩阵 P , 使 $P^{-1}AP$ 为对角形.

249. 设 $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$, 求过渡矩阵 T , 使 $T^{-1}AT$ 为对角形矩阵.

250. 设 α_1, α_2 是 2 维线性空间 V 的一组基, V 的线性变换 σ 在这组基下的矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$,

求 σ 的值域 $\sigma(V)$ 与核 $\sigma^{-1}(0)$.

251. 设在 F^3 中, 假设线性变换 $\sigma(x_1, x_2, x_3) = (0, x_1, x_2)$, 求 σ^2 的象与核.

252. 设在 F^n 中, 假设线性变换 $\sigma(x_1, x_2, \dots, x_n) = (0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$, 求 σ^2 的象与核.

253. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & x & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} 5 & & \\ & y & \\ & & -4 \end{pmatrix}$ 相似, 求 x, y .

254. 设 F 上三维线性空间的线性变换 σ 关于基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 的矩阵是 $\begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$, 求 σ 关于

基 $\beta_1 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3, \beta_2 = 3\alpha_1 + 4\alpha_2 + \alpha_3, \beta_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3$ 的矩阵.

255. 设 F 上三维线性空间的线性变换 σ 关于基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 的矩阵是 $\begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 0 & -15 & 8 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, 求 σ 关于

基 $\beta_1 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3, \beta_2 = 4\alpha_2 + \alpha_3, \beta_3 = 2\alpha_3$ 的矩阵.

256. 线性空间 R^3 的线性变换 σ 为 $\sigma(x_1, x_2, x_3) = (2x_1, 3x_2, -2x_3)$, 求 $\text{Im}(\sigma)$ 与 $\text{Ker}(\sigma)$, 并计算它们的维数.

257. 令 F^4 表示数域 F 上四元列空间. 取 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 8 & 1 \\ 1 & 3 & -9 & 7 \end{pmatrix}$, 对于任 $\xi \in F^4$, 令 $\sigma(\xi) = A\xi$. 求

线性变换 σ 的核和象的维数.

258. 设 $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4\}$ 是 V_4 的标准基, 线性变换 σ 关于此基的矩阵是 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, 求 σ

的象 $\text{Im}(\sigma)$ 与核 $\text{Ker}(\sigma)$.

259. 设数域 F 上线性空间 V 的线性变换 σ 关于基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的矩阵是 $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$, 试找出 σ 的一个不变子空间.

260. 在 F^3 中定义线性变换 $\sigma(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + 2x_3, 2x_2 + x_3, -x_1 + x_2 + 3x_3)$, 试求 σ 的特征根和特征向量.

261. 设 σ 是 F^3 的一个线性变换, 试求 σ 的全部特征根及特征向量. 已知:

$$\sigma(1, 0, 0) = (5, 6, 3), \quad \sigma(0, 1, 0) = (-2, 0, 1).$$

262. 令 $\alpha_1 = \varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 + 2\varepsilon_3, \alpha_2 = -2\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 + 4\varepsilon_3, \alpha_3 = 2\varepsilon_1 + 4\varepsilon_2 - 2\varepsilon_3$, 设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 是 F^3 的一个基,

$\sigma \in L(F^3)$, 且 $\sigma(l_1\varepsilon_1 + l_2\varepsilon_2 + l_3\varepsilon_3) = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + l_3\alpha_3$, 求 σ 的特征根与特征向量.

263. 设 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$, 试由 A 的特征多项式和特征根写出 A^{-1} 的伴随阵 $(A^{-1})^*$ 的特征多项式和特征根.

264. 试求方阵 $A = \begin{pmatrix} a & a & \dots & a \\ a & a & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & \dots & a \end{pmatrix}$ 的特征根.

265. 在空间 $P[x]_n$ 中, 设线性变换 σ 为 $\sigma(f(x)) = f(x+1) - f(x)$, 试求 σ 在基

$$\varepsilon_i = x(x-1)\dots(x-i+1) \frac{1}{i!} \quad (i=1, 2, \dots, n-1)$$

下的矩阵.

266. 已知 P^3 中线性变换 A 在基 $\eta_1 = (-1, 1, 1), \eta_2 = (1, 0, -1), \eta_3 = (0, 1, 1)$ 下的矩阵是 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 求

A 在基 $\varepsilon_1 = (1, 0, 0), \varepsilon_2 = (0, 1, 0), \varepsilon_3 = (0, 0, 1)$ 下的矩阵.

267. 在 P^3 中, A 定义如下: $\begin{cases} A\eta_1 = (-5, 0, 3) \\ A\eta_2 = (0, -1, 6) \\ A\eta_3 = (-5, -1, 9) \end{cases}$, 其中 $\begin{cases} \eta_1 = (-1, 0, 2) \\ \eta_2 = (0, 1, 1) \\ \eta_3 = (3, -1, 0) \end{cases}$, 求 A 在基

$\varepsilon_1 = (1, 0, 0), \varepsilon_2 = (0, 1, 0), \varepsilon_3 = (0, 0, 1)$ 下的矩阵.

268. 在 $P^{2 \times 2}$ 中定义线性变换 $A_1(X) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} X$, $A_2(X) = X \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, 求 A_1, A_2 在基 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ 下的矩阵.

269. 设 3 维线性空间 V 上的线性变换 A 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$,

1) 求 A 在基 $\varepsilon_3, \varepsilon_2, \varepsilon_1$ 下的矩阵; 2) 求 A 在基 $\varepsilon_1, k\varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的矩阵, 其中 $0 \neq k \in P$.

270. 设 3 维线性空间 V 上的线性变换 A 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, 求 A 在基 $\varepsilon_1 + \varepsilon_2, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的矩阵.

271. 求复数域上线性变换空间 V 的线性变换 A 的特征值与特征向量. 已知 A 在一组基下的矩阵为: $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

272. 求复数域上线性变换空间 V 的线性变换 A 的特征值与特征向量. 已知 A 在一组基下的矩

阵为: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

273. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, 求 A^k .

四、证明题

274. 设 A, B 为同阶方阵. (1) 若 A 与 B 相似, 则 A 与 B 的特征多项式相同; (2) 举例说明(1)的逆命题不成立.

275. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是线性空间 V 的一组基, σ 是 V 上的线性变换, 证明: 如果 σ 可逆, 则 $\sigma(\alpha_1), \sigma(\alpha_2), \dots, \sigma(\alpha_n)$ 线性无关.

276. 设 A 是可逆矩阵, 证明: 如果 λ 是 A 的一个特征根, 那么 $\frac{1}{\lambda}$ 也是 A 的一个特征根.

277. 设 A, B 都是 n 阶矩阵, 且 A 可逆, 证明 AB 与 BA 相似.

278. 设 σ 是线性空间 V 上的线性变换, 且 $\sigma^2 = \sigma$, 令 $M_1 = \{\sigma(\alpha) | \alpha \in V\}$,

$M_2 = \{\alpha \mid \sigma(\alpha) = \alpha, \alpha \in V\}$, 求证 $M_1 = M_2$.

279. 设 σ, τ 都是线性空间 V 上的线性变换, 证明: 若 $\sigma\tau = \tau\sigma$, 则对 $\forall \alpha \in \text{Ker}(\sigma)$, 都有 $\tau(\alpha) \in \text{Ker}(\sigma)$.

280. 设 W_1 是数域 F 上线性空间 V 的子空间, σ 是 V 的线性变换, 证明 $W_2 = \{\beta \mid \beta \in V, \text{且} \sigma(\beta) \in W_1\}$ 是 V 的子空间.

281. 设 V 是数域 F 上一个一维线性空间, 证明 V 到自身的一个映射 σ 是线性映射的充要条件是: 对任意 $\xi \in V$, 都有 $\sigma(\xi) = a\xi$, 其中 a 是 F 中的一个常数.

282. 设 σ 是数域 F 上线性空间 V 的一个线性变换, $\xi \in V$, 并且 $\xi, \sigma(\xi), \dots, \sigma^{k-1}(\xi)$ 都不等于零, 但 $\sigma^k(\xi) = 0$, 证明 $\xi, \sigma(\xi), \dots, \sigma^{k-1}(\xi)$ 线性无关.

283. 设 $P^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in P\}$ 是数域 P 上 n 维线性空间, 定义

$\sigma(x_1, x_2, \dots, x_n) = (0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$, 证明 σ 是 P^n 的线性变换, 且 $\sigma^n = \theta$ (零变换).

284. 设 $P^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in P\}$ 是数域 P 上 n 维线性空间, 定义

$\sigma(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_2, \dots, x_{n-1}, 0)$, 证明 σ 是 P^n 的一个线性变换, 且 $\sigma^n = \theta$ (零变换).

285. 设 λ_1, λ_2 是线性变换 σ 的两个不同特征值, ξ_1, ξ_2 是分别属于 λ_1, λ_2 的特征向量, a, b 都是非零常数, 证明: 向量 $a\xi_1 + b\xi_2$ 不是 σ 的特征向量.

286. 设 A 的特征值为 λ , 如果 A 可逆, 证明: A^{-1} 的特征值为 $\frac{1}{\lambda}$.

287. 令 σ 是数域 F 上线性空间 V 的一个线性变换, 如果 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 分别是 σ 的属于互不相同的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 的特征向量, 那么 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 线性无关.

288.若线性变换 σ 与 τ 是可换, 则 τ 的象与核都是 σ 的不变子空间.

289.设 A 、 B 都是 n 阶矩阵, 且 A 可逆, 证明 AB 与 BA 相似.

290.设 σ 是线性空间 V 上的线性变换, 且 $\sigma^2 = \sigma$, 令 $M_1 = \{\sigma(\alpha) | \alpha \in V\}$,
 $M_2 = \{\alpha | \sigma(\alpha) = \alpha, \alpha \in V\}$, 求证 $M_1 = M_2$.

291. 设 σ, τ 都是线性空间 V 上的线性变换, 证明: 若 $\sigma\tau = \tau\sigma$, 则对 $\forall \alpha \in \text{Ker}(\sigma)$, 都有 $\tau(\alpha) \in \text{Ker}(\sigma)$.

292. 设 W_1 是数域 F 上线性空间 V 的子空间, σ 是 V 的线性变换, 证明 $W_2 = \{\beta \mid \beta \in V, \text{且} \sigma(\beta) \in W_1\}$ 是 V 的子空间.

293. 取定 $A \in M_n(F)$, 对任意 $X \in M_n(F)$, 规定 $\sigma(X) = AX - XA$, 证明: σ 是 $M_n(F)$ 的一个线性变换.

294. 设 M 是数域 F 上线性空间 V 的子空间, 并且存在 V 的子空间 N , 使 $V = M + N$, 对任意 $\alpha \in V$, 有唯一分解式 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 \in M, \alpha_2 \in N$. 定义 V 的变换 $\sigma(\alpha) = \alpha_2$. 证明: σ 是 V 的一个线性变换.

295. 在 $M_2(F)$ 中定义线性变换 σ 如下: $\sigma(X) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} X, X \in M_2(F)$. 证明: σ 可逆的充分必要

条件是 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$.

296. 试证明: 若矩阵 A 与 B 相似, C 与 D 相似. 则矩阵 $\begin{pmatrix} A & O \\ O & C \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} B & O \\ O & D \end{pmatrix}$ 相似.

297. 令 σ 是 n 维线性空间 V 的线性变换. 若 σ 是可逆变换. 则 σ 关于 V 的某一基的矩阵 A 的秩为 n .

298. 试证线性变换 σ 的不变子空间的交与和都是 σ 的不变子空间.

299. 设 V 是复数域 C 上的线性空间, σ 与 τ 是 V 的线性变换, 并且 $\sigma\tau = \tau\sigma$. 证明: 如果 λ_0 是 σ 的一个特征根, 那么特征子空间 V_{λ_0} 也是 τ 的不变子空间.

300. 设 σ 是线性空间 V 的可逆线性变换. 证明: σ 的特征根都不为零.

301. 若 α 为 n 阶方阵 A 的属于特征根 λ_0 的特征向量. 证明: λ_0 为 $T^{-1}AT$ 的特征根.

302. 设数域 F 上的矩阵 $A = \begin{pmatrix} b & c & a \\ c & a & b \\ a & b & c \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} c & a & b \\ a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}$. 证明: A, B, C 彼此相似.

303. 设 σ 是数域 F 上 n 维线性空间 V 的一个线性变换. 证明: σ 可以对角化那么 σ 有 n 个线性无关的特征向量.

304. 证明: 若数域 F 上 n 维线性空间 V 的线性变换 σ 有 n 个不同的特征根, 则 σ 在某一基下的矩阵是对角形.

305. 设 $A = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} \in M_2(F), c \neq 0$. 证明: A 在 F 上可对角化的充分必要条件是 $a \neq b$.

306. 设 A 是 n 阶方阵, A 有 n 个线性无关的特征向量 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$, 其对应的特征根均为 1 .
证明: A 是单位矩阵.

307. 设 A 是可逆矩阵且可对角化. 证明: A^{-1} 也可对角化.

308. 设 A 是可逆矩阵且可对角化. 证明: A^* 可对角化.

309. 证明: 可逆变换是双射.

310. 设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 是线性空间 V 的一组基, A 是 V 上的线性变换. 证明: A 是可逆变换当且仅当 $A\varepsilon_1, A\varepsilon_2, \dots, A\varepsilon_n$ 线性无关.

311. 在 $P[x]_n$ ($n > 1$) 中, 求微分变换 D 的特征多项式, 并证明 D 在任何一组基下的矩阵都不可能
是对角阵.

312.1) 设 λ_1, λ_2 是线性变换 A 的两个不同特征值, $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 是分别属于 λ_1, λ_2 的特征向量, 证明:

$\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ 不是 A 的特征向量; 2) 证明: 如果线性空间 V 的线性变换 A 以 V 中每个非零向量
作为它的特征向量, 那么 A 是数乘变换.

第九章 欧几里得空间

一、选择题（请从 A、B、C、D 中选出一个正确答案）

313. 设 V 是 n 维欧氏空间，则 V 中的元素具有如下性质 ()

- A. 若 $(\alpha, \beta) = (\alpha, \gamma) \Rightarrow \beta = \gamma$ B. 若 $|\alpha| = |\beta| \Rightarrow \beta = \gamma$
 C. 若 $(\alpha, \alpha) = 1 \Rightarrow |\alpha| = 1$ D. 若 $(\alpha, \beta) > 0 \Rightarrow |\alpha| = |\beta|$

314. 以下结论中错误的是 ()

- A. 在欧氏空间中保持向量长度不变的线性变换是正交变换.
 B. 在欧氏空间中保持距离不变的变换一定是正交变换.
 C. 欧氏空间中正交变换保持两个非零向量的夹角不变.
 D. 欧氏空间中正交变换保持向量的内积不变.

315. 下列矩阵既是正交矩阵又是对称矩阵的是 ()

- A. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 12 & 13 \\ 13 & 0 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}$

316. 欧氏空间 R^3 中的标准正交基是 ()

- A. $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}), (0, 1, 0)$ B. $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0), (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0), (0, 0, 1)$
 C. $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}), (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}), (0, 0, 0)$ D. $(1, -1, 1), (-1, 1, 1), (1, 1, -1)$

317. 设 α, β 是欧氏空间的非零向量，且 α, β 的夹角 $\theta = \arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，那么 ()

- A. $\theta = 150^\circ$; B. $\theta = 120^\circ$; C. $\theta = 210^\circ$; D. $\theta = 30^\circ$.

318. 下列命题错误的是 ()

- A. 正交矩阵的乘积仍是正交矩阵 B. 正交矩阵的行列式等于 1 或 -1
 C. 对称矩阵的乘积仍是对称矩阵 D. 实对称矩阵的特征根是实数

319. A 为 n 级实对称矩阵且正交，则 ()

- A. $A = I$ B. $A \sim I$ C. $A^2 = I$ D. A 合同于 I

320. 设 α, β 是相互正交的 n 维实向量，则下列各式中正确的是 ()

- A. $|\alpha + \beta|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2$ B. $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|$
 C. $|\alpha - \beta|^2 = |\alpha|^2 - |\beta|^2$ D. $|\alpha - \beta| = |\alpha| - |\beta|$

321. 欧氏空间的基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是标准正交基的充要条件是其度量矩阵 ()

A.是正交矩阵 B.是单位矩阵 C.是对称矩阵 D.是反对称矩阵

二、填空题

322.两个欧氏空间同构的充要条件是它们有_____.

323.正交变换的特征值等于_____.

324.在欧氏空间中, 由一个标准正交基到另一个标准正交基的过渡矩阵是_____.

325.在欧氏空间 R^3 中, 向量 $\alpha = (3, 0, 4)$, $\beta = (0, 5, 0)$, 则 $|\alpha| =$ _____, $(\alpha, \beta) =$ _____.

326.设 V 是一个欧氏空间, $\xi \in V$, a 是实数, 则 $|a\xi| =$ _____.

327. n 维欧氏空间 V 中, 向量 ξ 在标准正交基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 下的坐标是 (x_1, x_2, \dots, x_n) , 则

$(\xi, \alpha_i) =$ _____, $|\xi| =$ _____.

328. R^3 中的单位向量 β 正交于 $(1, -1, 0)$ 和 $(2, 0, 1)$, 则 $\beta =$ _____.

329.在欧氏空间 R^4 中, $\alpha = (3, 2, 2, 1)$, $\beta = (1, 1, t, 3)$, 若 α 与 β 的夹角是 $\frac{\pi}{2}$, 则 $t =$ _____.

330. R^n 空间中, 向量 α 与任意向量 β 的内积都等于零的充分必要条件是_____.

331.实对称矩阵 A 正定当且仅当 A 与_____合同.

332.在 $C[-1, 1]$ 中, 定义 $(f(x), g(x)) = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$, 向量 1 的长度为_____, 1 与 x 的夹角为_____.

333.设 A 为正交矩阵, 则 $|A| =$ _____或_____.

334.设 σ 为欧氏空间 V 线性变换, 若 $\forall \xi, \eta \in V$, 有 $(\sigma(\xi), \sigma(\eta)) = (\xi, \eta)$, 则 σ 为_____变换.

335.在 R^3 中, $\alpha_1 = (1, 2, 3)$, $\alpha_2 = (0, 1, 2)$, 则 $(\alpha_1, \alpha_2) =$ _____.

336.设 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, 在 R^n 中, $(\alpha, \beta) =$ _____.

三、计算题

337.已知 $\alpha_1 = (2, 0, 0)$, $\alpha_2 = (2, 2, 0)$, $\alpha_3 = (2, 2, 2)$ 是 R^3 的一个基, 用正交化方法求 R^3 的一个标准正交基.

338. 设 $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, 求一个正交矩阵 T , 使 $T'AT$ 为对角矩阵.

339. 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, 求一个正交矩阵 T , 使 $T'AT$ 为对角矩阵.

340. 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$, 求一个正交矩阵 T , 使 $T'AT$ 为对角矩阵.

341. 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, 求一个正交矩阵 T , 使 $T'AT$ 为对角矩阵.

342. 在欧氏空间 R^3 (按普通内积) 中, 向量 $\alpha = (-1, 2, 1)$ 与 $\beta = (a, -1, a^2)$ 的内积 $(\alpha, \beta) = 0$, β 的长度 $|\beta| = \sqrt{21}$, 求向量 β .

343. 设 $\alpha = (a_1, a_2), \beta = (b_1, b_2)$ 为二维实空间 R^2 中的任意两个向量, 并规定: $(\alpha, \beta) = a_1b_2 + a_2b_1$, 试问: R^2 是否作成欧氏空间?

344. 在欧氏空间 R^4 中 (内积按通常定义), 令 $\alpha = (2, 1, 3, 2)$, $\beta = (1, 2, -2, 1)$, 求向量 α, β 之间的夹角 $\langle \alpha, \beta \rangle$.

345. 在欧氏空间 R^4 中 (内积按通常定义), 令 $\alpha = (1, 2, 2, 3)$, $\beta = (3, 1, -5, 1)$, 求向量 α, β 之间的夹角 $\langle \alpha, \beta \rangle$.

346. 在欧氏空间 R^4 中 (内积按通常定义), 令 $\alpha = (1, 1, 1, 2)$, $\beta = (3, 2, -1, 0)$, 求向量 α, β 之间的夹角 $\langle \alpha, \beta \rangle$.

347. 在 R^4 中按通常内积的定义求一单位向量, 并且与三个向量

$\alpha = (1, 1, -1, 1), \beta = (1, -1, -1, 1), \gamma = (2, 1, 1, 3)$ 正交.

348. 设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5$ 是五维欧氏 V 空间中的一组标准正交基, $V_1 = L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 其中

$\alpha_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_5, \alpha_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_4, \alpha_3 = 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$, 求 V_1 的一组标准正交基.

349. 求齐次线性方程组
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - 3x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 0 \end{cases}$$
 的解空间的一组标准正交基.

350. 用正交线性变换化二次型 $x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$ 为标准形.

351.用正交线性变换化二次型 $x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2x_3$ 为标准形.

352.用正交线性变换化二次型 $2x_1x_2 + x_3^2$ 为标准形.

353.在欧氏空间中, 将下列向量组化为标准正交的向量组.:

$$\alpha_1 = (1, 1, 0, 0), \alpha_2 = (1, 0, 1, 0), \alpha_3 = (-1, 0, 0, 1), \alpha_4 = (1, -1, -1, 1)$$

354.设 V 是 4 维欧氏空间, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 为 V 的一组标准正交基, 子空间 $W = L(\alpha_1, \alpha_2)$, 其中

$\alpha_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \alpha_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3$, 求 W^\perp .

355. 已知 $R^{2 \times 2}$ 的子空间 $W = L(A_1, A_2)$, 其中 $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 求 W^\perp 的一组标准正交基.

356. 设 A 是 n 级实对称矩阵, 且满足 $A^2 + 2A = 0$, $\text{rank}(A) = k$, 试求: $|A + 3E|$.

357. 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 5x_2^2 + cx_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 6x_2x_3$ 的秩为 2, 求
(1) 求参数 c ; (2) 求一正交变换化二次型为标准形.

358. 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2ax_1x_2 + 2x_1x_3 + 4bx_2x_3$ 通过正交变换化为标准形 $f = y_1^2 + 2y_2^2$, 求参数 a, b 及所用的正交变换.

359. 设 V 是一 n 维欧氏空间, $\alpha \neq 0$ 是 V 中一固定向量, 令 $V_1 = \{x \mid (x, \alpha) = 0, x \in V\}$, 求 V_1 的维数.

360. 在 R^2 中, 设 $\alpha = (x_1, x_2), \beta = (y_1, y_2)$, 定义实数 $(\alpha, \beta) = x_1y_1 + (x_1 - x_2)(y_1 - y_2)$, 判断 (α, β) 是否为 R^2 的内积.

361. 在线性空间 R^2 按某种内积构成的欧氏空间 V 中, 已知基 $\alpha_1 = (1,0), \alpha_2 = (0,1)$ 的度量矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \text{ 试求 } V \text{ 的一组标准正交基.}$$

362. 已知 A 是 $2k+1$ 级正交矩阵, 且 $|A|=1$, 试求 $|A-E|$.

363. 在欧氏空间 $C[-1,1]$ 中, 对于线性无关的向量组 $1, x, x^2, x^3$ 施行正交化方法, 求出一个标准正交组.

四、证明题:

364. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta$ 都是一个欧氏空间的向量, 且 β 是 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性组合, 证明:

如果 β 与每一个 $\alpha_i (i=1,2,\dots,n)$ 正交, 则 $\beta=0$.

365. 设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 是三维欧氏空间中的一个标准正交基, 证明: $\alpha_1 = \frac{1}{3}(2\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 - \varepsilon_3)$,
 $\alpha_2 = \frac{1}{3}(2\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + 2\varepsilon_3)$, $\alpha_3 = \frac{1}{3}(\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 - 2\varepsilon_3)$ 也是一个标准正交基.

366. 设 \mathbf{B} 是一个正交矩阵, 证明:

(1) \mathbf{B} 的特征根的模等于 1;

(2) 如果 t 是 \mathbf{B} 的一个特征根, 那么 $\frac{1}{t}$ 也是 \mathbf{B} 的一个特征根.

367. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是欧氏空间 V 的一组基, 证明:

1) 如果 $\gamma \in V$ 使 $(\gamma, \alpha_i) = 0 (i = 1, 2, \dots, n)$, 那么 $\gamma = 0$;

2) 如果 $\gamma_1, \gamma_2 \in V$ 使对任一 $\alpha \in V$ 有 $(\gamma_1, \alpha) = (\gamma_2, \alpha)$, 那么 $\gamma_1 = \gamma_2$.

368.证明：正交矩阵的实特征值为 ± 1 .

369.设 A 为 n 级实对称矩阵，且满足 $A^2 - 4A + 3E = 0$ ，证明： $A - 2E$ 为正交矩阵.

370.设 A, B 为 n 级正交矩阵，且 $|A| \neq |B|$ ，证明： $A + B$ 为不可逆矩阵.

371. 设 A, B 为 n 级正交矩阵, n 为奇数, 证明: $|(A-B)(A+B)|=0$.

372. 证明: 若 A 是正定矩阵, 则 A^* 也是正定矩阵.

373. 对于 R^n 的线性变换 $\sigma(x) = Ax$ ($x \in R^n, A \in R^{n \times n}$ 取定), 证明: 若 A 是正交矩阵, 则 σ 是正交变换.

374. 对于 R^n 的线性变换 $\sigma(x) = Ax$ ($x \in R^n, A \in R^{n \times n}$ 取定), 证明: 若 A 是对称矩阵, 则 σ 是对称变换.

375. 设 V 是一 n 维欧氏空间, $\alpha \neq 0$ 是 V 中一固定向量, 证明: $V_1 = \{x | (x, \alpha) = 0, x \in V\}$ 是 V 一个子空间.

376. 证明: 欧氏空间中不同基的度量矩阵是合同的.

377. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 是 n 维欧氏空间 V 的一组向量, 而

$$\Delta = \begin{pmatrix} (\alpha_1, \alpha_1) & (\alpha_1, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_1, \alpha_m) \\ (\alpha_2, \alpha_1) & (\alpha_2, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_2, \alpha_m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\alpha_m, \alpha_1) & (\alpha_m, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_m, \alpha_m) \end{pmatrix}$$

证明: 当且仅当 $\Delta \neq 0$ 时 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关.

378. 证明: 上三角的正交矩阵必为对角矩阵, 且对角线上元素为 1 或 -1.

379. 已知 A 和 $A - E$ 都是 n 级正定矩阵, 证明: $E - A^{-1}$ 是正定矩阵.

380. 设 A 是 n 级正定矩阵, 证明: $|A+2E| > 2^n$.

381. 设 A 是 n 级正定矩阵, 证明: 存在 n 级正定矩阵 B , 使得 $A = B^2$.

382. 设 ξ, η 是欧氏空间 V 中彼此正交的向量, 证明: $|\xi + \eta|^2 = |\xi|^2 + |\eta|^2$.

383. 设 V 是一个 n 维欧氏空间, 证明: 如果 W 是 V 的一个子空间, 则 $(W^\perp)^\perp = W$.

384. 证明: n 维欧氏空间的两个正交变换的乘积是一个正交变换.

385. 设 σ 是欧氏空间 V 到自身的一个映射, 对 $\forall \xi, \eta \in V$, 有 $(\sigma(\xi), \sigma(\eta)) = (\xi, \eta)$, 证明: σ 是 V 的一个线性变换, 因而是一个正交变换.

386. 设 $\alpha = (a_1, a_2), \beta = (b_1, b_2)$ 为二维实空间 R^2 中的任意两个向量, p, q 是两个实数. 证明: R^2 对内积 $(\alpha, \beta) = pa_1b_1 + qa_2b_2$ 作成欧氏空间的充分必要条件是 $p > 0, q > 0$.

387. 设 α 为欧氏空间 V 中的一个固定的向量, 令 $V_1 = \{\beta \mid (\alpha, \beta) \geq 0, \beta \in V\}$, 证明: V_1 构成子空间的充要条件是 $\alpha = 0$, 即 $V_1 = V$.

388. 证明: 对欧氏空间中的任意向量 α, β , 有 $|\alpha + \beta|^2 + |\alpha - \beta|^2 = 2|\alpha|^2 + 2|\beta|^2$.

389. 设 α 与 β 为 n 维欧氏空间 V 中两个不同的向量, 且 $|\alpha| = |\beta| = 1$. 证明: $(\alpha, \beta) \neq 1$.

390. 设 V 是一 n 维欧氏空间, $\alpha \neq 0$ 是 V 中一固定向量, 1) 证明: $V_1 = \{x \mid (x, \alpha) = 0, x \in V\}$ 是 V 的一个子空间; 2) 证明: V_1 的维数等于 $n-1$.

391. 证明: 反对称实数矩阵的特征值是零或纯虚数.

392. 设 σ 是欧氏空间 V 到 W 的一个同构映射, 证明: 如果 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 是 V 的一个标准正交基, 则 $\sigma(\varepsilon_1), \sigma(\varepsilon_2), \dots, \sigma(\varepsilon_n)$ 是 W 的一个标准正交基.

393. σ 是欧氏空间 V 的线性变换, 证明: σ 是正交变换的充要条件是它保持任意两个向量 ξ 与 η 的距离不变, 即 $|\sigma(\xi) - \sigma(\eta)| = |\xi - \eta|, \xi, \eta \in V$.

394. 设 A 是 n 级实对称矩阵, 证明: A 正定的充分必要条件是 A 的特征多项式的根全大于零.

395. 证明: 如果 A 是 n 维欧氏空间的一个正交变换, 那么 A 的不变子空间的正交补也是的 A 不变子空间.

