§3.8 平面束

定义3.8.1 空间中通过同一直线的所有平面的集合叫做有轴平面束,那条直线叫做平面束的轴。

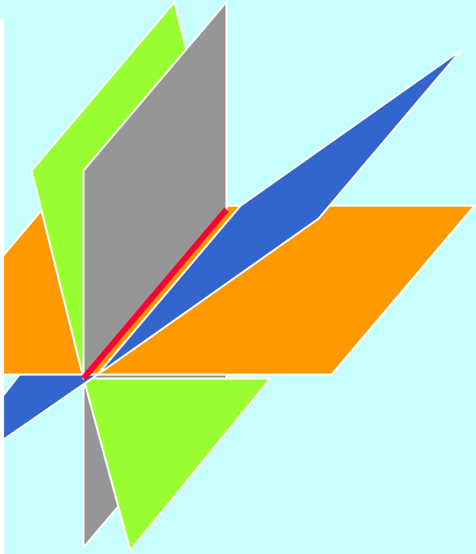
定义 3.8.2 空间中平行于同一个平面的所有平面的集合叫做平行平面束。

定义 3.8.3 如果有两个平面

$$\Pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \quad (1)$$

$$\Pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \quad (2)$$

交于一条直线 L 为轴的有轴平面束的方程是:



$$l(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+m(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0 \qquad 3.8\text{-}1$$

其中l，m是不全为零的任意实数

现在我们来证明这个结论：

证明：当任取两个不为零的 l,m 的值时

(3.8-1)表示一个平面，把(3.8-1)改写为

$$(lA_1+mA_2)x+(lB_1+mB_2)y+$$

$$(lC_1+mC_2)z+(lD_1+mD_2)=0,$$

这里的系数 $lA_1+mA_2, lB_1+mB_2, lC_1+mC_2$ 不能全为零,这是因为如果全为零,即

$$lA_1+mA_2=0$$

$$lB_1+mB_2=0,$$

$$lC_1+mC_2=0,$$

因为平面Π_1与Π_2的交线L上的点的坐标同时满足方程(1)与(2),从而必满足方程（3.8-1）,所以（3.8-1）总代表通过直线L的平面,也就是（3.8-1）总表示以直线L为轴的平面束中的平面。

如果反过来会是什么情况呢？

*反过来，*可以证明对于以直线 L 为轴的平面束中的任意一个平面Π,我们都能确定 l,m 使平面Π的方程为（3.8-1）的形式。

为此只要在平面Π上选取不属于轴L的任一点(x_0, y_0, z_0),那么由（3.8-1）表示的平面要通过点(x_0, y_0, z_0)的条件是

$$l(A_1 x_0 + B_1 y_0 + C_1 z_0 + D_1) + m(A_2 x_0 + B_2 y_0 + C_2 z_0 + D_2) = 0,$$

所以

$$l : m = (A_2 x_0 + B_2 y_0 + C_2 z_0 + D_2) : [-(A_1 x_0 + B_1 y_0 + C_1 z_0 + D_1)],$$

而（x_0,y_0,z_0)不在轴L上，所以

$A_1x_0+B_1y_0+C_1z_0+D_1$,

$A_2x_0+B_2y_0+C_2z_0+D_2$ 不能全为零

因此平面Π的方程可以写为（3.8-1）的形式：

$$(A_2x_0+B_2y_0+C_2z_0+D_2)\,(A_1x+B_1y+C_1z+D_1) -$$

$$(A_1x_0+B_1y_0+C_1z_0+D_1)(A_2x+B_2y+C_2z+D_2) =0$$

定理3.8.2

如果两个平面

Π_1： $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$

Π_2： $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$

为平行平面，即，$A_1 : A_2$

$=B_1 : B_2=C_2 : C_2$

那么方程（3.8-1），即

$$l(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+m(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0,$$

表示平行平面束,平面束里任何一个平面都和平面Π_1或Π_2平行,其中l,m是不全为零的任意实数,且

$$-m: L \neq A_1: A_2$$

$$=B_1: B_2=C_1: C_2$$

推论　　由平面Π：$Ax+By+Cz+D=0$

决定的平行平面束的方程是：

$Ax+By+Cz+\lambda=0$ 其中 λ 是任意实数。

例1 求通过两平面$2x+y-2z+1=0$；$x+2y-z-2=0$的交线且与平面$X+Y+Z-1=0$垂直的平面方程

解　设所求平面方程为:

$L(2x+y-2z+1)+m(x+2y-z-2)=0$ 即

$(2L+m)x+(L+2m)y+(-2L-m)z+(L-2m)=0,$

再由两平面垂直的条件

$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$得

$(2L+m)x+(L+2m)y+(-2L-m)z+(L-2m)=0$

即 $L+2m=0$ 因此 $L:m=2:(-1)$

所求平面方程为

$2(2x+y-2z+1)-(x+2y-z-2)=0$ 即

$3x-3z+4=0$

例2求与平面$3X+Y-Z+4=0$平行且在OZ轴

上截距等于-2的平面方程.

解：可设所求平面方程为 $3x+y-z+\lambda=0$

因为这平面在z轴上的截距为-2，所以这平

面通过点（0，0，-2），由此得：$2+\lambda=0$

所以$\lambda=-2$

因此所求方程为$3x+y-z-2=0$

例3 试证明两直线

$$\mathrm{L}_1: \begin{cases} \pi_1: & A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ \pi_2: & A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

$$\mathrm{L}_2 \begin{cases} \pi_3: & A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0, \\ \pi_4: & A_4x+B_4y+C_4z+D_4=0 \end{cases}$$

在同一平面上的条件是

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix} = 0$$

证　因为通过L_1 的任意平面为

λ_1（$A_1X+B_1Y+C_1Z+D_1$）+λ_2($A_2X+B_2Y+C_2Z+D_2$)=0,

（3），其中λ_1,λ_2是不完全的任意实数；

而通过L_2 的任意平面为

λ_3（$A_3X+B_3Y+C_3Z+D_3$）+λ_4（$A_4X+B_4Y+C_4Z+D_4$）=0,　（4）

其中λ_3，λ_4是不完全的任意实数。

因此两直线L_1与L_2在同一平面上的充要条件是存在不全为零的实数λ_1，λ_2与λ_3，λ_4使（3）与（4）代表同一平面，也就是（3）与（4）的左端仅相差一个不为零的数因子m

$$\lambda_1(A_1X+B_1Y+C_1Z+D_1)+\lambda_2(A_2X+B_2Y+C_2Z+D_2)\equiv m[\lambda_3(A_3X+B_3Y+C_3Z+D_3)+\lambda_4(A_4X+B_4Y+C_4Z+D_4)],$$

化简整理得

$$(\lambda_1A_1+\lambda_2A_2-m\lambda_3A_3-m\lambda_4A_4)X+$$
$$(\lambda_1B_1+\lambda_2B_2-m\lambda_3B_3-m\lambda_4B_4)Y+$$
$$(\lambda_1C_1+\lambda_2C_2-m\lambda_3C_3-m\lambda_4C_4)z+$$
$$(\lambda_1D_1+\lambda_2D_2+\lambda_3D_3-m\lambda_4D_4)\equiv 0$$

因为λ_1，λ_2，λ_3，λ_4不全为零，所以得

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & -mA_3 & -mA_4 \\ B_1 & B_2 & -mB_3 & -mB_4 \\ C_1 & C_2 & -mC_3 & -mC_4 \\ D_1 & D_2 & -mD_3 & -mD_4 \end{vmatrix} = 0,$$

而$m\neq0$，因此两直线L_1与L_2
共面的充要条件为

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \\ D_1 & D_2 & D_3 & D_4 \end{vmatrix}=0$$