文山学院 WENSHAN UNIVERSITY

第三节 n 阶行列式

主要内容

- 定义
- 行列式定义的进一步研究

三级行列式的定义为：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

（1） 三阶行列式展开有几项？n阶呢？

（2） 各项有什么特点？

（3） 各项的正负号如何确定？

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

$$= \sum (-1)^t a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} ,$$

其中 t 为排列$j_1\,j_2\,j_3$ 的逆序数，$\sum$ 表示对1、2、 3三个数的所有排列 $j_1\,j_2\,j_3$ 求和.

定义4 设有 n^2 个数，排成 n 行 n 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

作出表中位于不同行不同列的 n 个数的乘积，并冠以符号 $(-1)^t$，得到形如

$$\boxed{(-1)^t a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}}$$

的项，其中 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 为自然数1, 2, …， n 的一个排列，t 为这个排列的逆序数．由于这样的排列共有$n!$ 个，因而共有 $n!$ 项．所有这 $n!$ 项的代数和

$$\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^t a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

称为 **n 阶行列式**，记作

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

例 1 证明对角行列式(其中对角线上的元素是 λ_i)

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n,$$

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \therefore & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

证　第一式是显然的，下面只证第二式.

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^t a_{1n}a_{2,n-1}\dots a_{n1}=(-1)^t \lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n,$$

其中 t 为排列 $n(n-1)\dots2\ 1$ 的逆序数，故

$$t=0+1+2+\dots+(n-1)=n(n-1)/2.$$

证毕

例 2 证明下三角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

证 由于当 $j>i$ 时, $a_{ij}=0$, 故 D 中可能不为 0 的元素 a_{ip_i} ,其下标应有 $p_i \le i$,

即 $p_1 \le 1, p_2 \le 2, \ldots, p_n \le n$.

在所有排列 $p_1p_2\ldots p_n$ 中，能满足上述关系的排列只有一个自然排列 $12\ldots n$ ，所以 D 中可能不为0的项只有一项 $(-1)^t\ a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$. 此项的符号

$$(-1)^t=(-1)^0=1\ ,$$

所以

$$D=a_{11}a_{22}\ \ldots\ a_{nn}\ .$$

证毕

例 3 设有 4 阶行列式

$$D_4=\begin{vmatrix} x & 2 & -1 & 3x \\ 4 & -5x & 2 & -5 \\ 2x & 1 & -2x & 3 \\ 1 & x & 4x & 2 \end{vmatrix}$$

问该行列式的展开式是几次多项式，并求最高幂的系数.

解　由行列式的定义，知

$$D_4 = \sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3} a_{4p_4},$$

显然，只有当 $a_{1p_1}, a_{2p_2}, a_{3p_3}, a_{4p_4}$ 都含有 x 时，其乘积的次数才最高，且为4.

第一行有 2 个元素含有 x，即为

$$a_{11} = x, a_{14} = 3x.$$

当 $a_{11} = x, a_{22} = -5x, a_{33} = -2x, a_{44} = 2$ 时，

此时它们的乘积等于 $20x^3$.

当 $a_{14}=3x, a_{22}=-5x, a_{31}=2x, a_{43}=4x$ 时,

其乘积等于 $-120x^4$, 列标排列为 4213, 逆序数为 4.

故所求的最高幂的系数为 -120,

D_4 是 4 次多项式.

由上述的 3 个例子容易得出如下结论:

当行列式的元素全是数域 P 中的数时，它的值也是数域 P 中的一个数.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad ?$$

二、行列式定义的进一步研究

在行列式的定义中，为了决定每一项的正负号把 n 个元素按行指标排列起来. 由于数的乘法是交换的，因而这 n 个元素的次序是可以任意写的，一般地，n 阶行列式中的项可以写成

$$a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n},$$

其中 $i_1 i_2 \cdots i_n$，$j_1 j_2 \cdots j_n$ 是两个 n 阶排列.

定义4′　n 阶行列式可定义如下

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{i_1 i_2 \cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$$

性质1 **行列互换，行列式不变.即**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式D的转置行列式，记作 D^T **或** D'

小结和作业

1. 请叙述n级行列式的定义？每一项的符号由什么确定？

2. 行列式其转置行列式的关系？

3. 作业见学习通.