文山學院
WENSHAN UNIVERSITY

第7章 线性变换

第3节 线性变换的矩阵（二）

主要内容

- 问题的提出
- 线性变换关于不同基下矩阵的关系
- 例题巩固 小结、提出进一步的思考

文山学院 WENSHAN UNIVERSITY

一、问题的提出

设 V 是数域 P 上 n 维线性空间，$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 是 V 的一组基. 线性空间 V 中任一向量 ξ 可以被该组基线性表出

即 $$\xi = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n \qquad (1)$$

$$\mathscr{A}(\xi) = \mathscr{A}(x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n)$$

$$= x_1\mathscr{A}(\varepsilon_1) + x_2\mathscr{A}(\varepsilon_2) + \cdots + x_n\mathscr{A}(\varepsilon_n) \qquad (2)$$

$$\mathscr{A}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n) = (\mathscr{A}(\varepsilon_1), \mathscr{A}(\varepsilon_2), \cdots, \mathscr{A}(\varepsilon_n))$$

$$= (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n) A, \qquad (3)$$

设 V 是数域 P 上 n 维线性空间，$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$;
$\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ 是 V 的两组基，线性变换关于这两组基下的矩阵为A，B.

由基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 到 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ 的过渡矩阵为 X.

问：　矩阵为A，B的关系？

文山学院 WENSHAN UNIVERSITY

二、同一线性变换在不同基下矩阵之间的关系

$$(\mathscr{A}(\varepsilon_1), \mathscr{A}(\varepsilon_2), \dots, \mathscr{A}(\varepsilon_n)) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)A, \quad (3)$$

$$(\mathscr{A}(\eta_1), \mathscr{A}(\eta_2), \dots, \mathscr{A}(\eta_n)) = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)B \quad (4)$$

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)X = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n). \quad (5)$$

于是 $\mathscr{A}(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) = (\mathscr{A}(\eta_1), \mathscr{A}(\eta_2), \dots, \mathscr{A}(\eta_n))$

$$= \mathscr{A}((\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)X) = (\mathscr{A}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n))X$$

$$= (\mathscr{A}(\varepsilon_1), \mathscr{A}(\varepsilon_2), \dots, \mathscr{A}(\varepsilon_n))X$$

$$= (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)AX = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)X^{-1}AX.$$

由此即得 $B = X^{-1}AX$.

定理 设线性空间 V 上的线性变换 $\mathscr{A}$ 在两组基

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n, \qquad (6)$$

$$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n \qquad (7)$$

下的矩阵分别为 A 和 B，从基(6)到(7)的过渡矩阵是 X，

于是 $B = X^{-1}AX$.

定义 设 A，B 为数域 P 上两个 n 级矩阵，若存在数域 P 上的 n 级可逆矩阵 X，使得 $B = X^{-1}AX$，

则称 A 相似于 B，记作 $A \sim B$.

线性变换在不同基下所对应的矩阵是相似的.

三、例题

例1 设 V 是数域 P 上一个二维线性空间，线性变换 $\mathscr{A}$ 在基 $\varepsilon_1=(1,0),\varepsilon_2=(0,1)$ 下的矩阵是 $A=\begin{pmatrix}2&3\\4&3\end{pmatrix}$.

1) 求线性变换 $\mathscr{A}$ 在基 η_1,η_2 下的矩阵 B, 其中

$$\eta_1=\varepsilon_1-\varepsilon_2,\ \eta_2=3\varepsilon_1+4\varepsilon_2;$$

2) 求 A^n（n 为正整数）.

文山学院 WENSHAN UNIVERSITY

解：1）因为 $\eta_1=\varepsilon_1-\varepsilon_2,\ \eta_2=3\varepsilon_1+4\varepsilon_2$

所以 $(\eta_1,\eta_2)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 4\end{pmatrix}$,

也就是过渡矩阵 $X=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 4\end{pmatrix}$

$$B=X^{-1}AX=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 4\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 4\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}4 & -3\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix}.$$

文山学院 WENSHAN UNIVERSITY

2）由 $B = X^{-1}AX$，得 $A = XBX^{-1}$.

所以 $A^n = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{n\text{个}} = \underbrace{(XBX^{-1})\,(XBX^{-1}) \ldots (XBX^{-1})}_{n\text{个}}$

$$= XB^nX^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}^n\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 6^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4(-1)^n + 3\cdot 6^n & 3(-1)^{n+1} + 3\cdot 6^n \\ 4(-1)^{n+1} + 4\cdot 6^n & 3(-1)^n + 4\cdot 6^n \end{pmatrix}.$$

小 结

1. 同一个线性变换关于不同基下的矩阵的关系?

2. 矩阵相似的概念?

思　考

1. 能否把相似矩阵视为同一个线性变换在不同基下的矩阵？

2. 相似矩阵具有哪些性质特征？

3. 能否找一组基，使线性变换在这个基下的矩阵是对角矩阵？

谢谢！