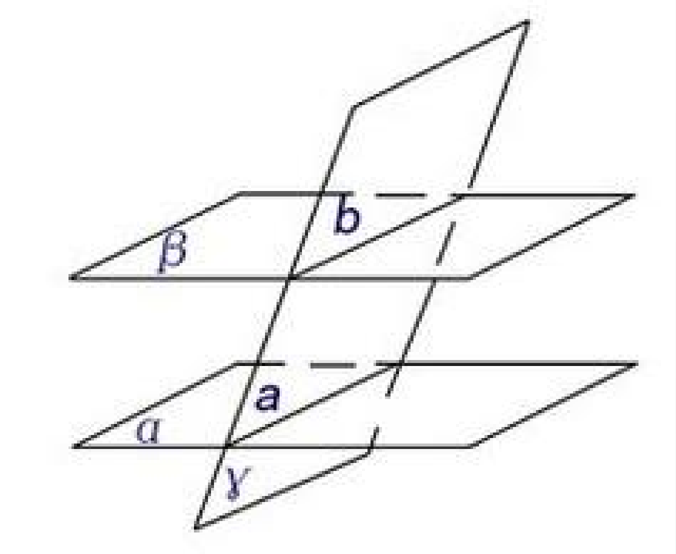
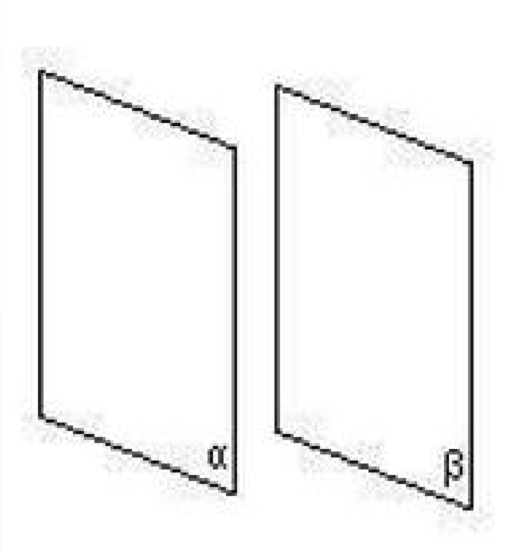
3.3两平面的相关位置

主讲人：周平

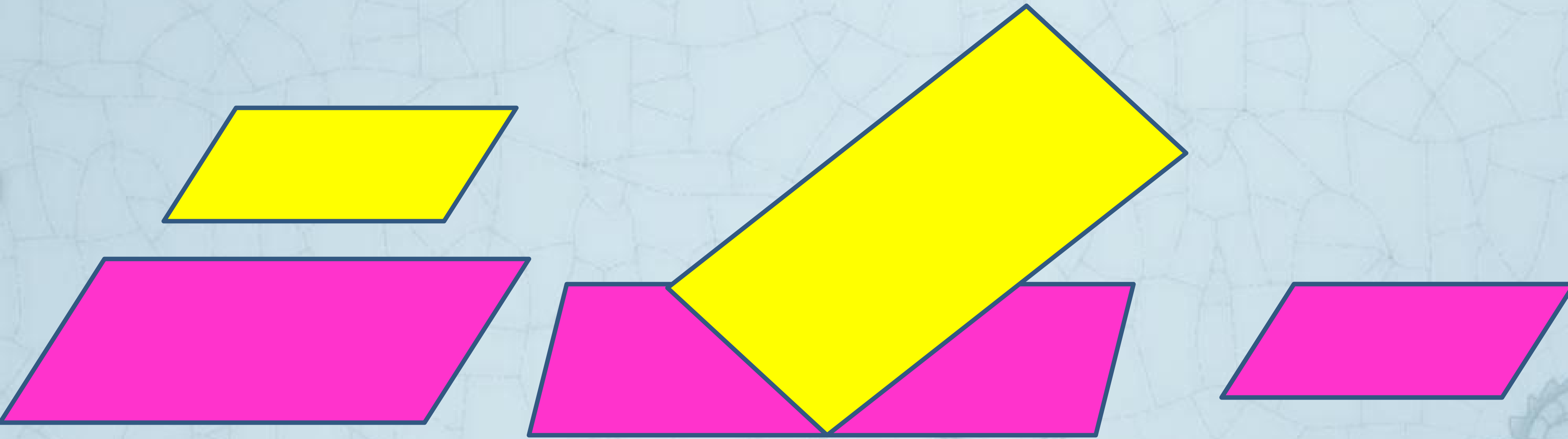
观察：下列平面有怎样的特征？





想一想：空间两个平面的位置关系有哪些？

空间两个平面的三种位置关系：



思考： 如何判定以上三种相关位置呢？

1.两个平面的相关位置成立的条件

设两个平面的方程分别为:

$$\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \qquad (1)$$

$$\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \qquad (2)$$

从代数的角度分析:

◇当两平面有一部分公共点时，它们**相交**;

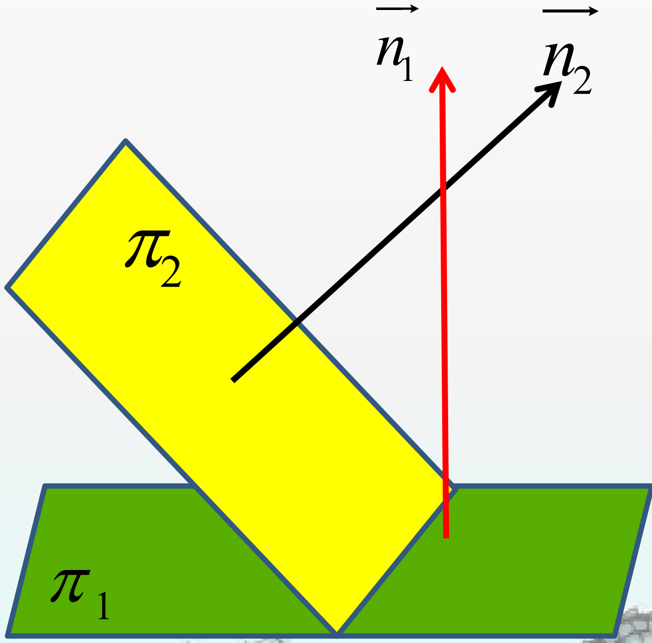
◇当两平面无公共点时，它们相互**平行**;

◇当一个平面上的所有点就是另一个平面的点时，这两个平面**重合**.

在直角坐标系下，从几何上看：

因为平面π_1与π_2的法向量分别为：

$n_1=\{A_1,B_1,C_1\}$与 $n_2=\{A_2,B_2,C_2\}$, 则

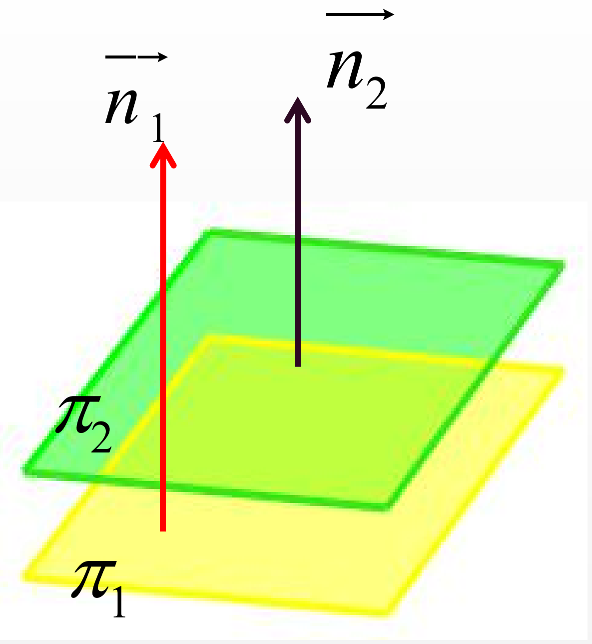


(1) π_1与π_2相交的条件：

$$A_1:B_1:C_1 \neq A_2:B_2:C_2$$

即$\overrightarrow{n_1}$不平行于$\overrightarrow{n_2}$.

(2) π_1与π_2平行的条件：



$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\neq\frac{D_1}{D_2}$$

即$\overrightarrow{n_1}$平行于$\overrightarrow{n_2}$.

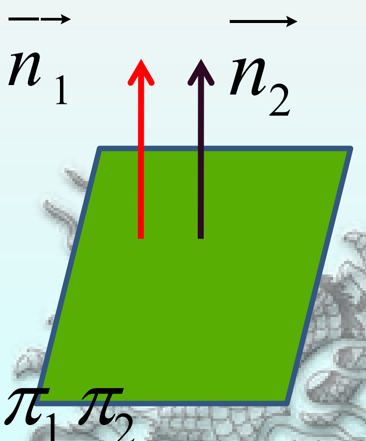
(3) π_1与π_2重合的条件：

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}$$

即$\overrightarrow{n_1}$平行于$\overrightarrow{n_2}$，

且方程中对应系数的

比值相等.



定理3.5.1　平面（1）与（2）的相关位置关系有如下充要条件：

1° 相交：$A_1:B_1:C_1 \neq A_2:B_2:C_2$；

2° 平行：$\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}\neq\dfrac{D_1}{D_2}$；

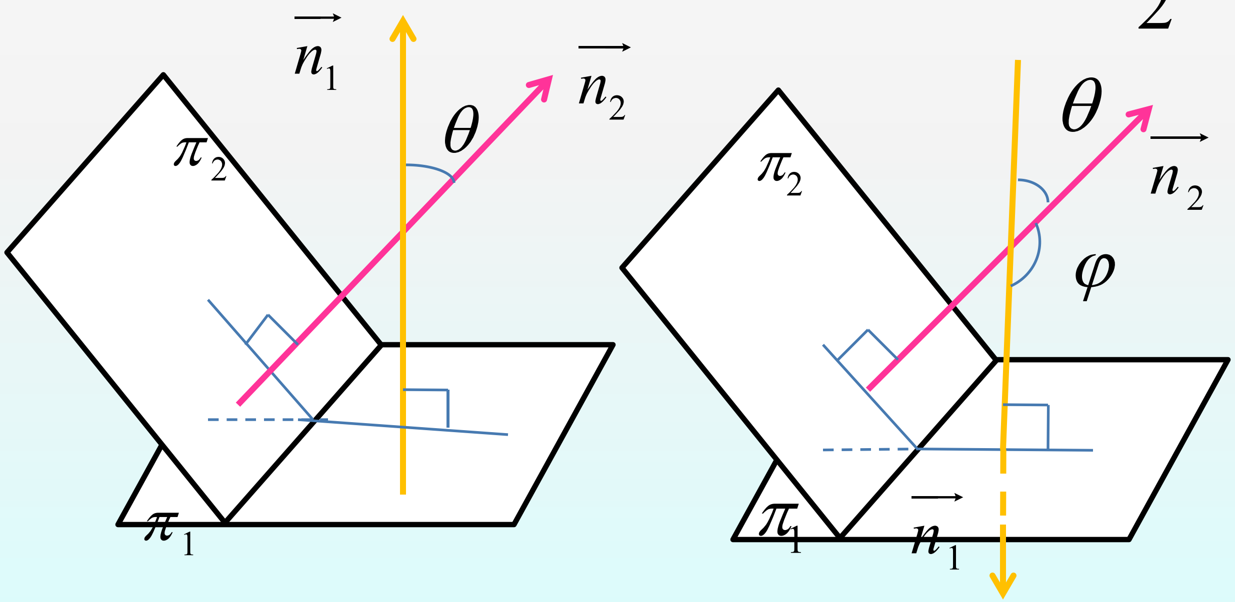
3° 重合：$\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}=\dfrac{D_1}{D_2}$.

2.两平面的交角

以下讨论在直角坐标系下进行

定义 平面内的一条直线把平面分为两部分，其中的每一部分都叫做半平面，从一条直线出发的两个半平面所组成的图形，叫做二面角.

(当两平面相互垂直时，规定$\varphi=\dfrac{\pi}{2}$)



$\varphi=\theta$　　　　$\varphi=\pi-\theta$

思考：一般的平面与平面的交角呢？

设两平面的夹角$\angle(\pi_1,\pi_2)=\varphi$而两平面的法向量$\overrightarrow{n_1}$与$\overrightarrow{n_2}$的夹角记为$\theta=\angle(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2})$，则$\varphi=\theta$或$\pi-\theta$,

故

$$\cos\angle(\pi_1,\pi_2)=\cos\varphi=\pm\cos\theta=\pm\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n_2}\right|}$$

$$=\pm\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

思考：平面与平面的交角公式？

注： 两平面 $\pi_1\perp\pi_2 \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0.$

3.应用举例

例 判断平面 $\pi_1: 2x-y-2z-5=0$ 与 $\pi_2: x+3y-z-1=0$ 的相关位置，并求出他们所成的角？

解 $\because \overrightarrow{n_1}=\{2,-1,-2\}, \overrightarrow{n_2}=\{1,3,-1\}$

$\therefore 2:-1:-2 \neq 1:3:-1$

故两平面相交.

又 $$\cos\angle(\pi_1,\pi_2)=\pm\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n_2}\right|}$$

$$=\pm\frac{2\times1+(-1)\times3+(-2)\times(-1)}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{1^2+3^2+(-1)^2}}$$

$$=\pm\frac{\sqrt{11}}{11}$$

故两平面所成的角为 $ar\cos\frac{\sqrt{11}}{11}$ 或 $\pi-ar\cos\frac{\sqrt{11}}{11}$.

4. 课堂小结

(1) 两平面分别相交、平行、重合的判断依据;

(2) 两平面的交角的计算.

思考题：

怎样计算两平行平面之间的距离呢?

5.布置作业

P_{111}: 1(3); 2(1); 4(1).

谢谢！