

第一章 向量与坐标

§ 1.1 向量的概念

授课学时：1 学时

一、教学目标 1.理解向量的概念；

2.掌握特殊向量的概念及性质；

3.能够判断向量的共线和共面。

二、教学重难点

1.教学重点：向量的本质意义；

2.教学难点：向量的灵活运用。

三、教学方法

多媒体辅助教学、讲练和探究式相结合教学法

四、教学过程

1.导入

(1) 二、授课内容 (一) 向量的概念：我们把既有大小又有方向的量叫向量 1、数量与向量的区别：数量只有大小，是一个代数量，可以进行代数运算、比较大小；向量有方向，大小，双重性，不能比较大小。

2.向量的表示方法：①用有向线段表示；②用字母 a 、 b ③用有向线段的起点与终点字母： \overrightarrow{AB} ；④向量 \overrightarrow{AB} 的大小——长度称为向量的模，记作 $|\overrightarrow{AB}|$ 。

3.有向线段：具有方向的线段就叫做有向线段，三个要素：起点、方向、长度。向量与有向线段的区别：(1) 向量只有大小和方向两个要素，与起点无关，只要大小和方向相同，则这两个向量就是相同的向量；(2) 有向线段有起点、大小和方向三个要素，起点不同，尽管大小和方向相同，也是不同的有向线段。

4、零向量、单位向量概念：①长度为 0 的向量叫零向量，记作 0 。0 的方向是任意的。注意 0 与 0 的含义与书写区别。②长度为 1 个单位长度的向量，叫单位向量。说明：零向量、单位向量的定义都只是限制了大小。

5、平行向量定义： ①方向相同或相反的非零向量叫平行向量；②我们规定 0 与任一向量平行. 说明：(1) 综合①、②才是平行向量的完整定义；(2) 向量 a 、 b 、 c 平行，记作 $a // b // c$. 6、相等向量定义： 长度相等且方向相同的向量叫相等向量. 说明：(1) 向量 a 与 b 相等，记作 $a = b$ ；(2) 零向量与零向量相等；

2.讲解新知 用更生动形象的生活事物描述向量。

3.例题讲解

例 1 判断：

- (1) 平行向量是否一定方向相同？（不一定）
- (2) 不相等的向量是否一定不平行？（不一定）
- (3) 与零向量相等的向量必定是什么向量？（零向量）
- (4) 与任意向量都平行的向量是什么向量？（零向量）
- (5) 若两个向量在同一直线上，则这两个向量一定是什么向量？（平行向量）
- (6) 两个非零向量相等的当且仅当什么？（长度相等且方向相同）
- (7) 共线向量一定在同一直线上吗？（不一定）

4. 课堂练习

- 1. 下列物理量中，不能称为向量的是（ ）
A. 质量 B. 速度 C. 位移 D. 力
- 2. 设 O 是正方形 $ABCD$ 的中心，向量 AO 、 OB 、 CO 、 OD 是（ ）
A. 平行向量 B. 有相同终点的向量 C. 相等向量 D. 模相等的向量
- 3. 下列命题中，正确的是（ ）
A. $|a| = |b| \Rightarrow a = b$ B. $|a| > |b| \Rightarrow a > b$ C. $a = b \Rightarrow a$ 与 b 共线 D. $|a| = 0 \Rightarrow a = 0$
- 4. 在下列说法中，正确的是（ ）
A. 两个有公共起点且共线的向量，其终点必相同
B. 模为 0 的向量与任一非零向量平行
C. 向量就是有向线段 D. 若 $|a| = |b|$ ，则 $a = b$
- 5. 下列各说法中，其中错误的个数为（ ）
(1) 向量 AB 的长度与向量 BA 的长度相等；(2) 两个非零向量 a 与 b 平行，则 a

与 \mathbf{b} 的方向相同或相反; (3) 两个有公共终点的向量一定是共线向量; (4) 共线向量是可以移动到同一条直线上的向量; (5) 平行向量就是向量所在直线平行

A. 2 个 B. 3 个 C. 4 个 D. 5 个

6. $\triangle ABC$ 中, D 、 E 、 F 分别为 BC 、 CA 、 AB 的中点, 在以 A 、 B 、 C 、 D 、 E 、 F 为端点的有向线段所表示的向量中, 与 EF 共线的向量有 ()

A. 2 个 B. 3 个 C. 6 个 D. 7 个

5. 课堂小结

通过对本节的学习, 我们清楚的了解了向量的概念和以及与标量间的联系。对我们实际生活中的事物有了一个向量性的认识。

6. 布置作业

课本第 3 页习题: 3、5

1.2 向量的加法

唐僧师徒四人西天取经，先到新疆，再从新疆到天竺，走了十万八千里。若是孙悟空一人独自前往，只需直接飞向天竺。在这个过程中，两种方式的位移是相同的，那么路程呢？



一、向量的加法

1. 定义 三角形定则解决向量加减的方法：将各个向量依次首尾顺次相接，结果为第一个向量的起点指向最后一个向量的终点。

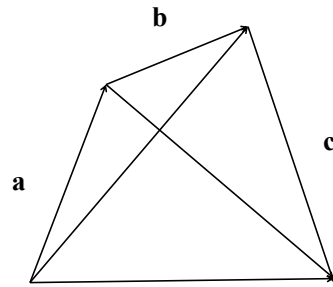
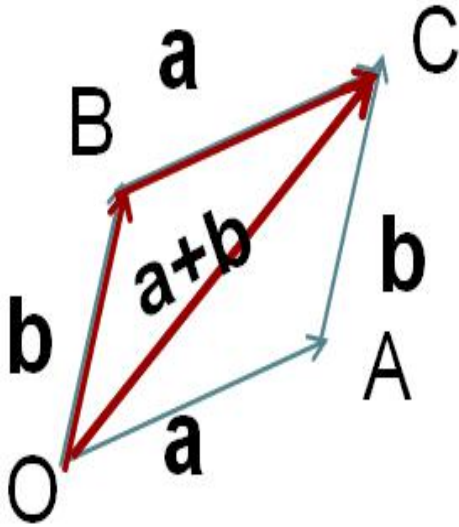
平行四边形定则解决向量加法的方法：将两个向量平移至公共起点，以向量的两条边作平行四边形，

向量的加法结果为公共起点的对角线。

定理 向量的加法符合以下的运算法则：

1. 交换律 $a+b=b+a$

2. 结合律 $(a+b)+c=a+(b+c)$

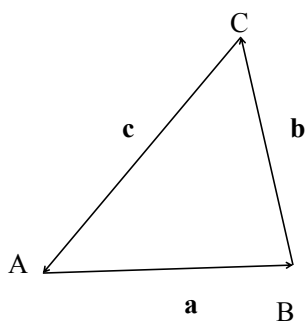


二、多边形法则

1. 对于有限个向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$, 其和可记为

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}$$

例 1 互不共线的三向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, 试证明顺次将它们的终点与始点相连而成一个三角形的充要条件是它们的和为零向量。



(充要性): 设 $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$,

作 $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{BC} = \mathbf{b}$,

所以 $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$

从而 $\overrightarrow{AB} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$

即

\overrightarrow{AC} 是 \mathbf{c} 的反向量: $\overrightarrow{AC} = -\mathbf{c}$,

所以 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \mathbf{0}$

即三向量 \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} 可以构成三角形.

例 3 证明对角线互相平分的四边形是平行四边形.

证明:如图,设四边形 ABCD 的对角线 AC, BD 相交于

点 O 且互相平分,

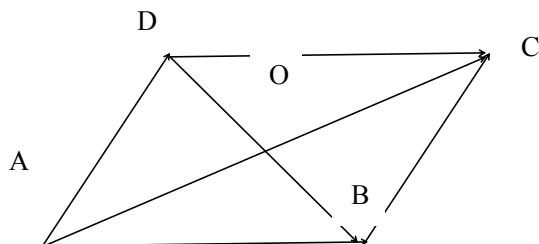
$$\text{因 } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OC}$$

$$\text{又 } \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{OB}$$

于是有 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$



- 小结
- 1、向量法遵循平行四边形法则（或三角形法则）；
 - 2、向量之和仍为向量；
 - 3、利用反向量可以把向量的减法运算变为向量的加法运算。

1.3 数量乘向量

1.3.1 实数 λ 与向量 a 的乘积是一个向量，记做 λa ，它的模是 $|\lambda a| = |\lambda| |a|$ ； λa 的方向，当 $\lambda > 0$ 时与 a 相同，当 $\lambda < 0$ 时，与 a 的反向，我们把这种运算叫做数量与向量的乘法，简称数乘。

注：当 $\lambda = 0$ 或 $a = 0$ 时， $|\lambda a| = 0$ ， $\lambda a = 0$ 不必讨论方向；

当 $\lambda = -1$ 时， $(-1)a$ 为 a 的反向量，简写为 $-a$ 。

已知向量 a 它的单位向量 a^0

$$a = \pm |a| a^0 \text{ 或 } a^0 = \pm \frac{a}{|a|}$$

定理 1.3.1 数量与向量的乘法满足下面的运算规律

3. $a = 1a$

4. 结合律 $\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a$

证：①当 $a = 0$ 或 λ, μ 中至少有一个为 0 时，等式成立。

②当 $a \neq 0, \lambda, \mu \neq 0$ 时，

$$|\lambda(\mu a)| = |\lambda| \cdot |\mu| \cdot |a|$$

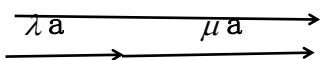
$$|(\lambda\mu)a| = |\lambda\mu| \cdot |a|, \text{ 即模相等。}$$

方向：当 λ, μ 同号时都与 \bar{a} 同向；当 λ, μ 异号时都与 \bar{a} 反向。

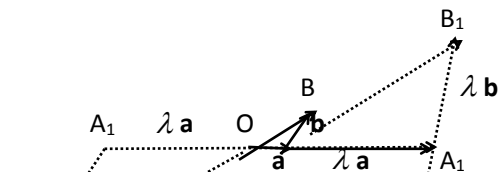
故 $\lambda(\mu\bar{a})$ 与 $(\lambda\mu)\bar{a}$ 的方向相同，所以有 $\lambda(\mu\bar{a}) = (\lambda\mu)\bar{a}$

5. 第一分配律 $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$

$$(\lambda + \mu)a$$



6. 第二分配律 $\lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b$



这里的 a, b 为向量， λ, μ 为任意实数

1.3 例：设 AM 是三角形 ABC 的中线，求证 $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$

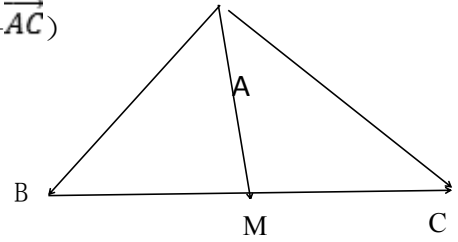
证：如图， $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM}$$

所以， $2\overrightarrow{AM} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM})$

又因为， $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MB} = \mathbf{0}$

所以， $2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ 即 $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$



小结：1、数量与向量的乘积仍为向量

2、一个非零向量与它的模的倒数之积为与它同一方向的单位向量

§ 1.4 向量的线性关系与向量的分解

授课学时，2 学时

一 . 教学目标

1. 知识目标: a. 理解向量之间的线性关系与分解及其定义;
b. 掌握线性相关的 8 个定理和相关推论;
c. 会判断是否线性相关
2. 能力目标: a. 通过向量的有限个线性运算, 增强学生的计算能力;
b. 能把向量熟练的运用到三角形, 四面体, 六面体等, 锻炼学生的合理运用能力。
3. 情感目标: a. 让学生更深入的了解向量之间的关系, 培养学生积极探索深入思考的态度;
b. 让抽象的东西转变成生活中常见的事物, 激发学生的想象力;
c. 让学生感受到数学就在生活中, 是如此的美妙。

二 . 教学重难点

1. 教学重点: 线性相关的定理和各个线性相关的表示
2. 教学难点: 向量的线性关系运算在几何证明中的应用

三. 数学方法: 多媒体辅助教学和探究式教学法

四. 教学过程

1. 导入: 前面我们学习了向量的加法和数与向量的乘法, 这些称为向量的线性运算, 有限个向量通过线性运算, 它的结果还是一个向量。
2. 讲解新知 1.1.4 定义 由向量 a_1, a_2, \dots, a_n 与实数 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 所组成的向量 $a = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n$ 叫做向量 a_1, a_2, \dots, a_n 的线性组合. 当向量 a 是 a_1, a_2, \dots, a_n 的线性组合时, 也称 a 可以用 a_1, \dots, a_n 线性表示. 或者说 a 可以分解成 a_1, a_2, \dots, a_n 的线性组合.

下面几个式子就是向量 a_1, a_2, \dots, a_n 的一些线性组合:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n ; \quad a_1 - 2a_2 + \dots + a_n ;$$

$$a_1 - a_2 ; \quad 4a_1 + 5a_2 ;$$

复习

零向量与任何共线的向量组共线.

零向量与任何共面的向量组共面。

定理 1.4.1 如果向量 $e \neq 0$, 则向量 r 与 e 共线的

充要条件是 $r = x e$ (1.4-1)

其中系数 x 被向量 r, e 唯一确定 .

e 称为用线性组合来表示共线向量的基底.

定理 1.4.2 如果向量 e_1, e_2 不共线, 则向量 r 与 e_1, e_2

共面的充要条件是 $r = x e_1 + y e_2$ (1.4-2)

并且系数 x, y 被 r, e_1, e_2 唯一确定.

e_1, e_2 叫做平面上向量的基底.

证: 因为 e_1, e_2 不共线, 于是 $e_1 \neq 0, e_2 \neq 0$.

1. 必要性 设 r 与 e_1, e_2 共面.

如果 r 与 e_1 或者 e_2 共线

因此总有 $r = x e_1 + y e_2$ ($y=0$ 或 $x=0$)

2. 充分性 设 $r = x e_1 + y e_2$, 要证明 r 与 e_1, e_2 共面

因为 $r = x e_1 + y e_2$, 此时, 如果 $x=0$, 或 $y=0$,

则有 r 与 e_1 共线或 r 与 e_2 共线. 因此 r 与 e_1, e_2 共面.

如果 $xy \neq 0$, 由于 $x e_1 // e_1, y e_2 // e_2$,

从两向量相加的平行四边形法则

可知: $r = x e_1 + y e_2$ 与 e_1, e_2 共面,

3. 证明 x, y 的唯一性

设 $r = x_1 e_1 + y_1 e_2 = x_2 e_1 + y_2 e_2$

则 $(x_1 - x_2) e_1 + (y_1 - y_2) e_2 = 0$,

又 $e_1 \neq 0, e_2 \neq 0$ 且不共线,

若 $x_1 \neq x_2$, 则有

$$e_1 = -(y_1 - y_2) / (x_1 - x_2) e_2$$

由定理 1.4.1 知 e_1 和 e_2 共线. 矛盾.

于是 $x_1 = x_2$. 同理 $y_1 = y_2$

至此, 我们从三个方面完成了定理 1.4.2 的证明:

1. 必要性: 设 r 与 e_1, e_2 共面, 证明 $r = xe_1 + ye_2$ 成立.
2. 充分性: 设 $r = xe_1 + ye_2$, 证明 r 与 e_1, e_2 共面.
3. 证明 x, y 的唯一性: 即证明 x, y 由 r 与 e_1, e_2 唯一确定.

定理 1.4.3 如果向量 e_1, e_2 不共线, 那么向量 r 与 e_1, e_2 共面的充要条件是 r 可以用向量 e_1, e_2 线性表示, 或者说向量 r 可以分解成 e_1, e_2 的线性组合, 即 $r = xe_1 + ye_2$, 并且系数 x, y 被 e_1, e_2 唯一确定.

证: 因为 e_1, e_2, e_3 不共面, 所以有 $e_1 \neq 0, e_2 \neq 0, e_3 \neq 0$.

且 e_1, e_2, e_3 彼此不平行.

1. 如果 r 与 e_1, e_2, e_3 中的某两个向量共面

例如与 e_1, e_2 共面, 则由定理 1.4.2, 有 $r = xe_1 + ye_2$

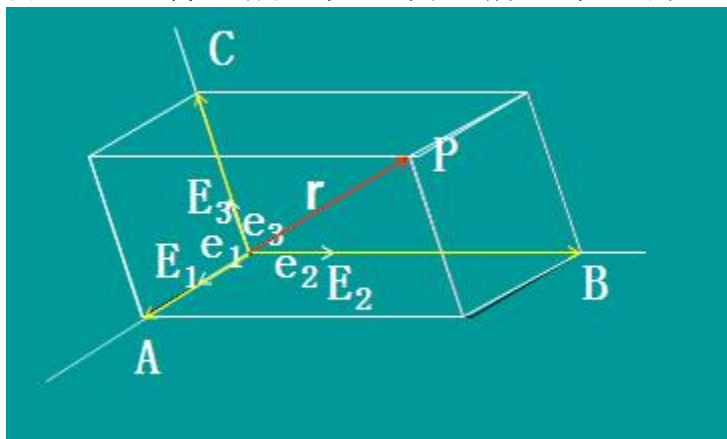
从而有 $r = xe_1 + ye_2 + 0e_3$

2. 如果 r 与 e_1, e_2, e_3 中的任意两个向量都不共面

将 r 与 e_1, e_2, e_3 归结到共同的始点 O . 并设 $OP = r$

$OE_1 = e_1, OE_2 = e_2, OE_3 = e_3$, 过 r 的终点 P 作三平面

由此构成如图所示的平行六面体。



定义 1.4.2 对于 $n(n \geq 1)$ 个向量 a_1, a_2, \dots, a_n , 如果存在不全为零的 n 个数 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 使得 $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n = 0$, 那么 n 个向量 a_1, a_2, \dots, a_n 叫做线性相关, 不是线性相关的向量叫做线性无关。换句话说, 向量 a_1, a_2, \dots, a_n 叫做线性无关就是指: 只有当 $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ 时, (1.4-4) 才成立。

推论: 一个向量 a 线性相关的充要条件为 $a=0$ 。

定理 1.4.4

在 $n \geq 2$ 时, 向量 a_1, a_2, \dots, a_n 线性相关的充要条件是其中有一个向量是其余向量的线性组合。

定理 1.4.5 如果一组向量中的一部分线性相关, 那么这组向量就线性相关。

设有一组向量 a_1, a_2, \dots, a_r ($s \leq r$), 其中一部分比如说 a_1, a_2, \dots, a_s 线性相关 即有不全为零的数 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ 使得

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_s a_s = 0 \quad \text{成立}$$

由上式显然有

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_s a_s + 0a_{s+1} + \dots + 0a_r = 0 \quad \text{成立.}$$

因为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ 至少有一个不为零, 所以

a_1, a_2, \dots, a_r 线性相关

推论: 如果一组向量中含有零向量, 则它们线性相关

因为零向量本身线性相关。故由定理得证。

定理 1.4.6 两向量共线的充要条件是它们线性相关

证: (必要性) 设向量 a, b 共线, 要证明它们线性相关。

即要找到不全为 0 的数 x, y , 使得 $x a + y b = 0$

事实上, 由于 a, b 共线, 若 $b \neq 0$, 由定理 1.4.1

有 $a = y b$, 即 $a - y b = 0$, 所以 a, b 线性相关

若 $b = 0$, 由推论, a, b 线性相关

(充分性): 设 a, b 线性相关, 要证明 a, b 共线

由于 a, b 线性相关, 所以存在不全为 0 的数 x, y

使得 $x a + y b = 0$, 不妨设 $x \neq 0$, 于是, $a = -y/x b$

若 $b \neq 0$, 由定理 1.4.1, a, b 共线

若 $b=0$, 显然 a, b 共线. 所以定理得证

故由定理 1.4.6 知

a, b 共线的充要条件是它们线性相关, 即存在不全为 0 的数 x, y , 使得

$$xa + yb = 0 \quad (1.4-5)$$

定理 1.4.7 三向量共面的充要条件是它们线性相关.

即向量 a, b, c 共面的充要条件是存在不全为 0 的数 x, y, z ,

使得 $xa + yb + zc = 0 \quad (1.4-6)$

定理 1.4.8 空间任何四个向量总是线性相关

证: 设 a, b, c, d 为空间任意四个向量,

1 若 a, b, c 共面, 由定理 1.4.7, a, b, c 线性相关

再由定理 1.4.5, a, b, c, d 线性相关

2 若 a, b, c 不共面,

由定理 1.4.3 知, $d = xa + yb + zc$

再由定理 1.4.4 知 a, b, c, d 线性相关.

定理得证.

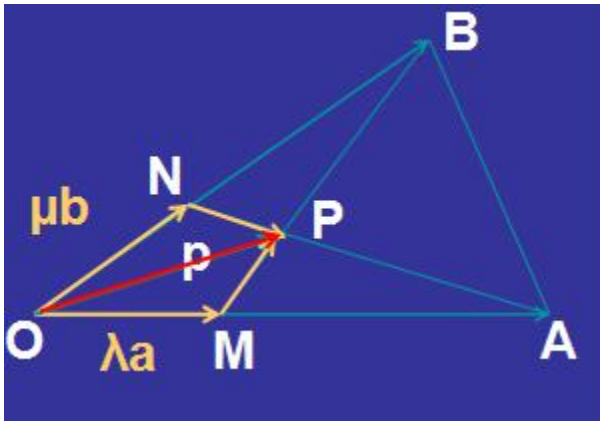
由定理 1.4.5 和定理 1.4.8 知:

推论: 空间四个以上向量总是线性相关

3. 例题讲解 例 1 在 $\triangle OAB$ 中, $OA=a, OB=b$. M, N 分别是边 OA, OB 上的点. 且

有 $OM = \lambda a, ON = \mu b$ 其中 $0 < \lambda < 1, 0 < \mu < 1$

设 AN 与 BM 相交于 P , 试把向量 $OP=p$ 分解成 a, b 的线性组合



解： 因为 $p=OM+MP$ 或 $p=ON+NP$

$OM=\lambda a$, 而 $MP=x MB=x(OB-OM)=x(b-\lambda a)$

又 $ON=\mu b$,

$NP=y NA=y(OA-ON)=y(a-\mu b)$

所以 $p=\lambda a+x(b-\lambda a)=\lambda(1-x)a+xb$

或者 $p=\mu b+y(a-\mu b)=ya+\mu(1-y)b$

即 $p=\lambda(1-x)a+xb$

$p=ya+\mu(1-y)b$

由于 a, b 不共线,由定理 1.4.2 得: $\lambda(1-x)=y$

$$x=\mu(1-y)$$

用代入消元法解得: $x=\mu(1-\lambda)/(1-\lambda\mu)$ $y=\lambda(1-\mu)/(1-\lambda\mu)$

将之代入 $p=\lambda(1-x)a+xb$ 中整理得:

$$p=\lambda(1-\mu)/(1-\lambda\mu)a+\mu(1-\lambda)/(1-\lambda\mu)b$$

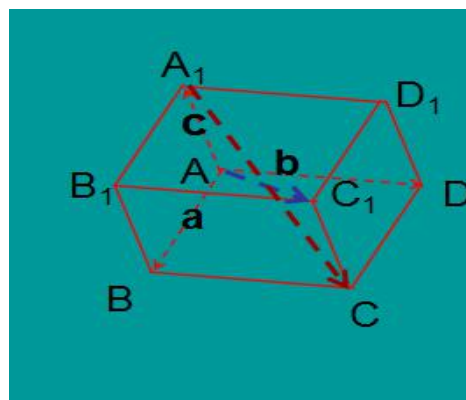
P8 例 2 如图, 在平行六面体中, $AB=a, AD=b,$

$AA_1=c$, 试用 a, b, c 来表示对角线向量 AC_1, A_1C .

解: $\because AC_1=AB+BC+CC_1$

$$\therefore AC_1 = a + b + c$$

$$A_1C=A_1A+AB+BC$$



$$A1C = -c + b + a = a + b - c$$

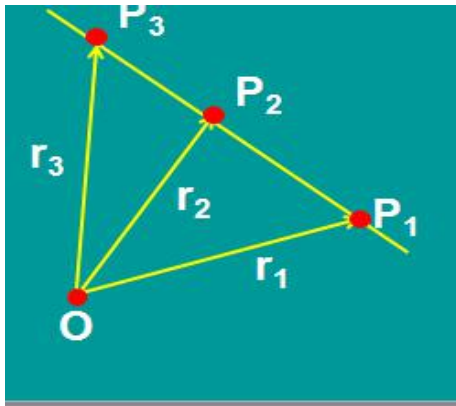
例3 设 $OP_i = r_i$ ($i=1, 2, 3$) 试证 P_1, P_2, P_3 三点共线

的充要条件是存在不全为0的数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 使得

$$\lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 + \lambda_3 r_3 = 0 \quad \text{且} \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$$

证明: 必要性 设 P_1, P_2, P_3 三点共线,

要证存在不全为0的数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 使得



$$\lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 + \lambda_3 r_3 = 0, \quad \text{且} \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$$

事实上, 因为 P_1, P_2, P_3 三点共线,

所以 P_1P_3, P_2P_3 两向量共线。

所以存在不全为0的数 m, n , 使得 $m P_1P_3 +$

$$n P_2P_3 = 0$$

$$\text{即} \quad m (r_3 - r_1) + n (r_3 - r_2) = 0$$

$$\text{由此得} \quad m r_1 + n r_2 - (m + n) r_3 = 0$$

$$\lambda_1 = m, \quad \lambda_2 = n, \quad \lambda_3 = -(m + n)$$

则有 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 不全为0

$$\text{使得} \quad \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 + \lambda_3 r_3 = 0,$$

$$\text{且} \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$$

必要性得证.

充分性 如果存在不全为0的数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 使得

$$\lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 + \lambda_3 r_3 = 0 \quad \text{且} \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$$

要证 P_1, P_2, P_3 三点共线

事实上, 因为存在不全为0的数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 使得

$$\lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 + \lambda_3 r_3 = 0 \quad \text{且} \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$$

不妨设 $\lambda_3 \neq 0$, 根据条件, $\lambda_3 = -(\lambda_1 + \lambda_2)$

$$\text{所以} \quad \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 - (\lambda_1 + \lambda_2) r_3 = 0$$

$$\text{整理得} \quad \lambda_1 (r_3 - r_1) + \lambda_2 (r_3 - r_2) = 0$$

所以 $\lambda_1 \vec{P_1P_3} + \lambda_2 \vec{P_2P_3} = 0$

因为 $\lambda_3 \neq 0$, 且 $\lambda_3 = -(\lambda_1 + \lambda_2)$

所以 λ_1, λ_2 不全为 0,

于是由 $\lambda_1 \vec{P_1P_3} + \lambda_2 \vec{P_2P_3} = 0$

可以得出 $\vec{P_1P_3}, \vec{P_2P_3}$ 两向量共线

即 P_1, P_2, P_3 三点共线.

充分性得到证明.

4. 课堂练习

课本 23 页第 2, 3, 6 题

5. 课堂小结

- (1) 线性组合的定义
- (2) 各个线性组合的表达关系式
- (3) 向量在图形中的应用
- (4) 判断是否线性相关

6. 布置作业

课本 22 页习题, 任选择 4 题

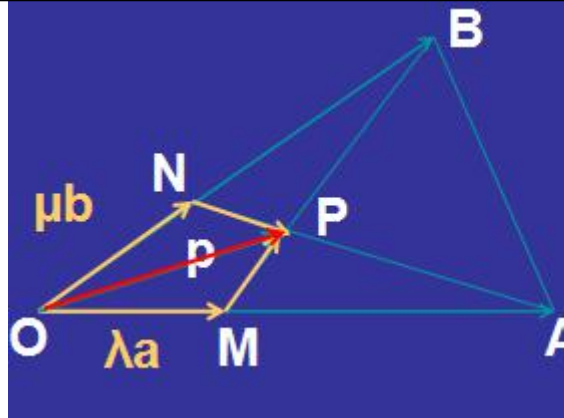
7. 板书设计

§ 向量的线性关系与向量的分解		
定义	例题	练习
定义 1.4.1 由向量 a_1, a_2, \dots, a_n 与实数 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 所组成的向量 $a = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n$ 叫做向量 a_1, a_2, \dots, a_n 的线性组	例 1. 在 $\triangle OAB$ 中, $OA=a, OB=b$. M, N 分别是边 OA, OB 上的点. 且有 $OM = \lambda a, ON = \mu b$ 其中 $0 < \lambda < 1, 0 < \mu < 1$ 设 AN 与 BM 相交于 P , 试把向量 $OP = p$ 分解成 a, b 的线性组合	见书 P22 习题

合.

当向量 a 是 a_1, a_2, \dots, a_n 的线性组合时,也称 a 可以用 a_1, \dots, a_n 线性表示.

或者说 a 可以分解成 a_1, a_2, \dots, a_n 的线性组合.



定理 1.4.1

如果向量 $e \neq 0$,那么向量 r 与向量 e 共线的充要条件是 r 可以用向量 e 线性表示,或者说 r 是 e 的线性组合,即 $r = xe$,并且系数 x 被 e, r 唯一确定。这时 e 称为用线性组合来表示共线向量的基底。

解 : 因为 $p = OM + MP$ 或 $p = ON + NP$

$OM = \lambda a$, 而 $MP = x MB = x(OB - OM) = x(b - \lambda a)$

又 $ON = \mu b$,

$NP = y NA = y(OA - ON) = y(a - \mu b)$

所以 $p = \lambda a + x(b - \lambda a) = \lambda(1 - x)a + x b$

或者 $p = \mu b + y(a - \mu b) = y a + \mu(1 - y) b$

即 $p = \lambda(1 - x)a + x b$

$p = y a + \mu(1 - y) b$

由于 a, b 不共线,由定理 1.4.2 得: $\lambda(1 - x) = y$

$x =$

$\mu(1 - y)$

用代入消元法解得: $x = \mu(1 - \lambda) / (1 - \lambda \mu)$

$y = \lambda(1 - \mu) / (1 - \lambda \mu)$

将之代入 $p = \lambda(1 - x)a + x b$ 中整理得:

$p = \lambda(1 - \mu) / (1 - \lambda \mu) a + \mu(1 -$

定理 1.4.3

如果向量 e_1, e_2 不共线,那么向量 r 与 e_1, e_2 共面的充要条件是 r 可以用向量 e_1, e_2 线性表示,或者说向量 r 可以分解成 e_1, e_2 的线性组合,即 $r = xe_1 + ye_2$,并且系数 x, y 被 e_1, e_2 唯一确定。

<p>定义 1.4.2</p> <p>对于 $n(n \geq 1)$ 个向量 a_1, a_2, \dots, a_n, 如果存在不全为零的 n 个数 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 使得 $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n = 0$, 那么 n 个向量 a_1, a_2, \dots, a_n 叫做线性相关, 不是线性相关的向量叫做线性无关。换句话说, 向量 a_1, a_2, \dots, a_n 叫做线性无关就是指: 只有当 $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ 时, (1.4-4) 才成立。</p> <p>推论: 一个向量 a 线性相关的充要条件为 $a=0$。</p>	$\lambda) / (1 - \lambda \mu) b$	
<p>定理 1.4.4</p> <p>在 $n \geq 2$ 时, 向量 a_1, a_2, \dots, a_n 线性相关的充要条件是其中有一个向量是其余向量的线性组合。</p>		
<p>定理 1.4.5</p> <p>如果一组向量的一部分向量线性相关, 那么这一组向量就线性相关</p> <p>推论: 一组向量如果含有</p>		

<p>零向量, 那么这组向量线性相关。</p>		
<p>定理 1.4.6 两向量共线的充要条件是它们线性相关。</p>		
<p>定理 1.4.7 三向量共面的充要条件是它们先线性相关。</p>		
<p>定理 1.4.8 空间任何四个向量总是线性相关。 推论: 空间四个以上向量总是线性相关。</p>		

§ 1.5 标架与坐标

授课学时：2 学时

一、教学目标：

- 1.了解各种标架的定义；
- 2.掌握坐标的定义；
- 3.掌握坐标在标架中各个卦线的符号；
- 4.掌握矢量的坐标运算。

二、教学重难点

- 1.教学难点：标架的几何意义
- 2.教学重点：矢量的坐标运算

三、教学方法

多媒体辅助教学、讲练和探究式结合教学法

四、教学过程

1.导入：

前面我们已知道空间中任何矢量可由三个不共面的矢量来线性表示,于是在空间中任取一点 O , 再引出三个不共面的矢量 e_1, e_2, e_3 , 那么空间中任何矢量 r 可由 e_1, e_2, e_3 线性表示, 即

$$r = xe_1 + ye_2 + ze_3 \quad (1)$$

并且这里的 x, y, z 是唯一的一组有序实数.

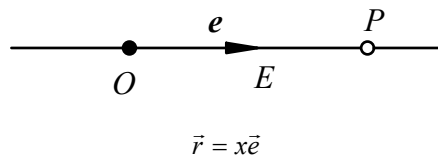
我们把 O, e_1, e_2, e_3 的集合称为仿射标架, 记作 $\{O; e_1, e_2, e_3\}$, (x, y, z) 称为向量 r 在该标架下的坐标。标架分为右手系和左手系标架.

如果 $e_i \perp e_j$, 且 $|e_i| = 1 \quad i, j = 1 \cdots 3$ 称 $\{O; e_1, e_2, e_3\}$ 为直角标架, 常用 $\{O; i, j, k\}$ 表示空间右手直角坐标系.

2. 讲解新知

2.1 直线上的坐标系

在直线上确定一个定点 O 且取定一个非零向量 $\overrightarrow{OE} = \vec{e}$, 则对直线上的每个向量 \vec{r} , 都存在惟一的实数 x , 都可表示成



定义 1.5.1 直线上的一个定点连同直线上的一个非零向量 \bar{e} 叫做直线的的一个标架, 记作 $\{O; \bar{e}\}$. 若 \bar{e} 是单位向量, 则 $\{O; \bar{e}\}$ 叫笛卡儿标架, 一般的标架称为仿射标架.

定义 1.5.2 对于取定标架 $\{O; \bar{e}\}$ 的直线上的任意点 P , 向量 \overrightarrow{OP} 叫做点 P 的向径 (径矢), 向径 \overrightarrow{OP} 关于标架 $\{O; \bar{e}\}$ 的分量 x 叫做点 P 关于标架 $\{O; \bar{e}\}$ 的坐标, 记为 $P(x)$ 或 (x) .

定义 1.5.3 在直线上取定标架 $\{O; \bar{e}\}$ 之后, 直线上的点 P 就与向径 \overrightarrow{OP} 取得一一对应, 而向径 \overrightarrow{OP} 通过关系式 $\overrightarrow{OP} = x\bar{e}$ 就与全体实数的集合之间取得一一对应, 因此直线上的全部向量或点的集合与全体实数的集合之间取得了一一对应关系, 这个一一对应关系叫做直线上的向量或点的坐标系. 若 $\{O; \bar{e}\}$ 是笛卡儿标架, 则由它决定的坐标系叫笛卡儿坐标系, 若 $\{O; \bar{e}\}$ 是仿射标架, 则由它决定的坐标系叫仿射坐标系.

由于直线坐标系完全由标架 $\{O; \bar{e}\}$ 决定, 我们也常用 $\{O; \bar{e}\}$ 来表示直线坐标系. 此时 O 叫坐标原点, \bar{e} 叫坐标向量.

取定标架 $\{O; \bar{e}\}$ 的直线叫坐标轴, 简称轴. 可记为 Ox .

例: 点关于坐标面、坐标轴、原点的对称点,

设 $P(x, y, z)$ 关于 O 点的对称点为 $(-x, -y, -z)$

关于 xoy 面的对称点为 $(x, y, -z)$

关于 x 轴的对称点为 $(x, -y, -z)$

2.2 矢量的基本坐标运算

(1) 矢量的坐标分量等于其终点的坐标减去其始点的坐标.

特别 \overrightarrow{OP} 称为点 P 的径矢

$P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2)$, 则 $\overrightarrow{P_1P_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$

(2) $a = \{X_1, Y_1, Z_1\}, b = \{X_2, Y_2, Z_2\}$, 则 $a + b = \{X_1 + X_2, Y_1 + Y_2, Z_1 + Z_2\}$

(3) 设 $a = \{X, Y, Z\}$, 则 $\lambda a = \{\lambda X, \lambda Y, \lambda Z\}$

2.3 共线和共面向量的坐标性质

(1) $a = \{X_1, Y_1, Z_1\}, b = \{X_2, Y_2, Z_2\}$ 共线 $\Leftrightarrow \frac{X_1}{X_2} = \frac{Y_1}{Y_2} = \frac{Z_1}{Z_2}$

当分母为 0 时, 约定分子也为 0

推论：三个点 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ 和 $C(x_3, y_3, z_3)$ 共线的充要条件是

$$\vec{AB} // \vec{AC} \Leftrightarrow \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1} = \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}$$

(2) 三个非零向量 $a\{X_1, Y_1, Z_1\}$, $b\{X_2, Y_2, Z_2\}$ 和 $c\{X_3, Y_3, Z_3\}$ 共面的充要条件是

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} = 0$$

证明：

复习：平面向量 $a\{X_1, Y_1\}$, $b\{X_2, Y_2\}$ 共线 $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix} = 0$

四维向量共空间是否可以类似讨论？事实上 $\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}$ 称为三向量

张成的有向体积

推论：四个点 $A_i(x_i, y_i, z_i) (i=1,2,3,4)$ 共面的充要条件是

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 & 0 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 & 0 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

或

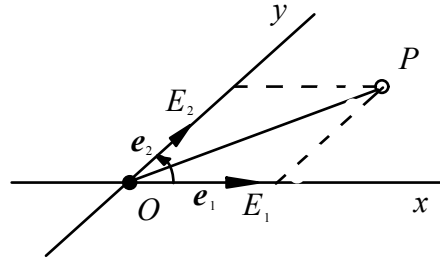
$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (1.5-7')$$

2. 4 平面上的坐标系

在平面上确定一个定点 O 且取定两个不共面的向量 $\vec{OE}_1 = \vec{e}_1$, $\vec{OE}_2 = \vec{e}_2$, 则对平面上每个向量 \vec{r} , 都存在惟一一对有序实数, 使 \vec{r} 分解成 \vec{e}_1 和 \vec{e}_2 的线性组合:

$$\vec{r} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$$

定义 1.5.4 平面上一个定点 O 连同平面上的两个不共线的有序向量 \vec{e}_1 , \vec{e}_2 的全体叫做平面的一个标架, 记作 $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$. 若 \vec{e}_1, \vec{e}_2 都是单位向量, 则 $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ 叫笛卡儿标架, 若 \vec{e}_1, \vec{e}_2 不仅是单位向量而且相互垂直, 则 $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ 叫笛卡儿直角标架, 一般的标架 $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ 称为平面仿射标架.



定义 1.5.5 公式 $\vec{r} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$ 中的有序实数对 x, y 叫做向量 \vec{r} 对于标架 $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ 的分量或坐标.

定义 1.5.6 对于取定标架 $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ 上的平面上任意点 P , 向量 \vec{OP} 叫做点 P 的向径 (径矢), 向径 \vec{OP} 关于标架 $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ 的分量 x, y 叫做点 P 关于标架 $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ 的坐标, 记为 $P(x, y)$ 或 (x, y) .

在平面上取定标架 $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ 之后, 平面上的点 P 就与向径 \vec{OP} 取得一一对应, 而向径 \vec{OP} 通过关系式 $\vec{OP} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$ 又与有序实数对的集合之间取得一一对应, 因此平面上的全部向量或点的集合与全体有序实数对集合之间取得了一一对应关系, 这个一一对应关系叫做平面上的向量或点的坐标系.

若 $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ 是笛卡儿 (直角) 标架, 则由它决定的坐标系叫笛卡儿 (直角) 坐标系, 若 $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ 是仿射标架, 则由它决定的坐标系叫平面仿射坐标系.

由于平面坐标系完全由标架 $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ 决定, 我们也常用 $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ 来表示平面坐标系. 此时 O 叫坐标原点, \vec{e}_1, \vec{e}_2 叫坐标向量.

平面右旋坐标系和左旋坐标系的概念.

今后使用的一般都是平面右旋笛卡儿直角坐标系, 简称为平面直角坐标系, 其坐标向量通常用 \vec{i}, \vec{j} 表示.

取定标架 $\{O; \bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ 后, 将 \bar{e}_1, \bar{e}_2 归结到原点 O , 就得到坐标轴, 简称轴 Ox 和 Oy , 分别称为 x 轴和 y 轴. 坐标系可记为 $O-xy$.

平面坐标系使我们建立了平面上的点与一对有序数组 (x, y) 之间的一一对应关系, 于是几何与代数就结合起来, 增强了我们研究平面图形的能力与手段.

下面引进空间直角坐标系.

3.5 定比分点

对于有向 $\vec{P_1P_2}$ ($P_1 \neq P_2$) 线段, 如果点 P 满足 $\vec{P_1P} = \lambda \vec{PP_2}$, 则称点 P 为 $\vec{P_1P_2}$ 的 λ 分点(定比分点)

定理 1.5.6 设有向线段 $\vec{P_1P_2}$ 的始点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$, 终点为 $P_2(x_2, y_2, z_2)$, 则分 $\vec{P_1P_2}$ 成定比 $\lambda(\lambda \neq -1)$ 的分点 P 的坐标是

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda} \quad (1.5-8)$$

推论: 设 $P_i(x_i, y_i, z_i) (i=1,2)$, 那么线段 $\vec{P_1P_2}$ 的中点坐标是

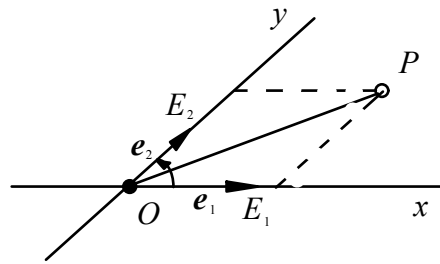
$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, y = \frac{y_1 + y_2}{2}, z = \frac{z_1 + z_2}{2} \quad (1.5-9)$$

3.6 空间坐标系

在空间上确定一个定点 O 且取定3个不共面的有序向量 $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$, 则对空间上每个向量 \bar{r} , 都存在惟一的一组有序实数组 x, y, z , 使 \bar{r} 分解成 \bar{e}_1, \bar{e}_2 和 \bar{e}_3 的线性组合:

$$\bar{r} = x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2 + z\bar{e}_3$$

定义 1.5.7 空间上的一个定点 O 连同3个不共面的有序向量 $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ 的全体叫做空间的一个标架, 记作 $\{O; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$. 若 $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ 都是单位向量, 则 $\{O; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ 叫笛卡儿标架, 若 $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ 不仅是单位向量而且两两垂直, 则 $\{O; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ 叫笛卡儿直角标架, 一般的



标架 $\{O; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ 称为空间仿射标架.

介绍右手标架和左手标架的概念.

定义 1.5.8 公式 $\vec{r} = x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2 + z\bar{e}_3$ 中的有序实数组 x, y, z 叫做向量 \vec{r} 对于标架 $\{O; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ 的分量或坐标, 记作 $\vec{r}(x, y, z)$ 或 $\{x, y, z\}$.

定义 1.5.9 对于取定标架 $\{O; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ 的空间中的任意点 P , 向量 \overrightarrow{OP} 叫做点 P 的向径(径矢), 向径 \overrightarrow{OP} 关于标架 $\{O; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ 的分量 x, y, z 叫做点 P 关于标架 $\{O; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ 的坐标, 记为 $P(x, y, z)$ 或 (x, y, z) .

在空间取定标架 $\{O; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ 之后, 空间上的点 P 就与向径 \overrightarrow{OP} 取得一一对应, 而向径 \overrightarrow{OP} 通过关系式 $\overrightarrow{OP} = x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2 + z\bar{e}_3$ 又与有序三数组的集合之间取得一一对应, 因此空间上的全部向量或点的集合与全体有序三数组的集合之间取得了一一对应关系, 这个一一对应关系叫做空间中的向量或点的一个坐标系.

若 $\{O; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ 是笛卡儿(直角)标架, 则由它决定的空间坐标系叫笛卡儿(直角)坐标系, 若 $\{O; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ 是仿射标架, 则由它决定的坐标系叫空间仿射坐标系.

由于空间坐标系完全由标架 $\{O; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ 决定, 我们也常用 $\{O; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ 表示空间坐标系. 此时 O 叫坐标原点, $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ 叫坐标向量.

今后使用的一般都是空间右手笛卡儿直角坐标系, 简称为空间直角坐标系, 其坐标向量通常用 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 表示.

取定标架 $\{O; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ 后, 将 $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ 归结到原点 O , 就得到 3 个坐标轴, 简称轴 Ox, Oy 和 Oz 轴, 分别称为 x, y 和 z 轴. 空间坐标系可记为 $O-xyz$.

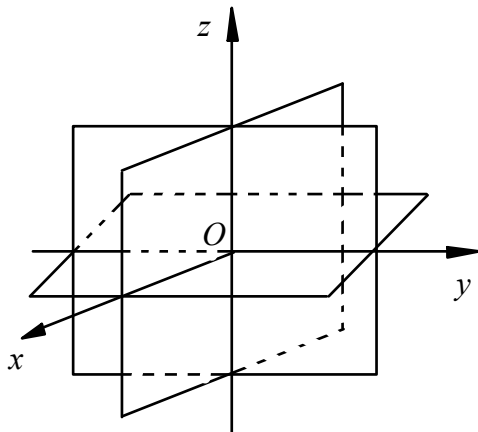
如无特别声明, 今后使用的都是空间直角坐标系.

(1) 坐标面与卦限

三条坐标轴中的任意两条可以确定一个平面, 这样定出的三个平面统称为坐标面.

由 x 轴与 y 轴所决定的坐标面称为 xOy 面，由 y 轴与 z 轴所决定的坐标面称为 yOz 面，由 z 轴与 x 轴所决定的坐标面称为 zOx 面。

三个坐标面把空间分成了八个部分，这八个部分称为卦限（如下图）。

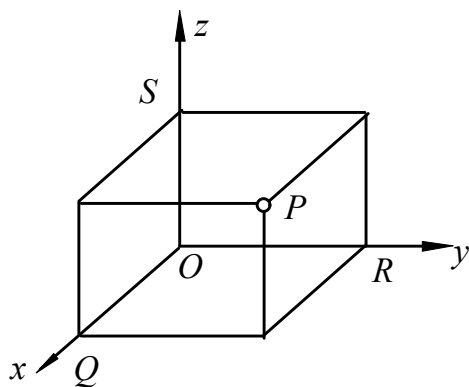


(2) 空间点的直角坐标

取定空间直角坐标系之后，我们就可以建立起空间点与有序数组之间的对应关系。

设 P 为空间的一已知点，过 P 点分别作垂直于 x 轴、 y 轴、 z 轴的三个平面，它们与 x 轴、 y 轴、 z 轴的交点依次为 Q 、 R 、 S ，这三点在 x 轴、 y 轴、 z 轴的坐标依次为 x 、 y 、 z ，于是：空间点就唯一地确定了一个有序数组 x 、 y 、 z ，这组数叫 P 点的坐标。

依次称 x 、 y 、 z 为点 P 的横坐标、纵坐标和立坐标，记为 $P(x, y, z)$ 。



(3)用向量的分量进行向量的线性运算

定理 1.5.1 向量的分量等于其终点的坐标减去其起点的坐标.

即设 $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, 则 $\overline{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$

证 由点及向量坐标的定义知

$$\overline{OM_1} = x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2 + z_1\vec{e}_3, \overline{OM_2} = x_2\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + z_2\vec{e}_3,$$

$$\begin{aligned}\text{所以 } \overline{M_1M_2} &= \overline{OM_2} - \overline{OM_1} = (x_2\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + z_2\vec{e}_3) - (x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2 + z_1\vec{e}_3) \\ &= (x_2 - x_1)\vec{e}_1 + (y_2 - y_1)\vec{e}_2 + (z_2 - z_1)\vec{e}_3.\end{aligned}$$

$$\text{由定义知 } \overline{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}.$$

定理 1.5.2 两向量的和分量等于其对应的分量的和:

证 $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$, 那么

$$\begin{aligned}\vec{a} + \vec{b} &= \{x_1, y_1, z_1\} + \{x_2, y_2, z_2\} \\ &= (x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2 + z_1\vec{e}_3) + (x_2\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + z_2\vec{e}_3) \\ &= (x_1 + x_2)\vec{e}_1 + (y_1 + y_2)\vec{e}_2 + (z_1 + z_2)\vec{e}_3,\end{aligned}$$

$$\text{所以 } \vec{a} + \vec{b} = \{x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2\}$$

定理 1.5.3 数乘向量时, $k\{x, y, z\} = \{kx, ky, kz\}$.

定理 1.5.4 $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$, 则 \vec{a}, \vec{b} 共线的充要条件是

定理 1.5.5 三向量 $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$, $\vec{c} = \{x_3, y_3, z_3\}$ 共面的充要条件是

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

证 因为 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 不共面, 所以存在不全为零的实数 λ, μ, γ 使得

$$\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$$

由此可得

$$\begin{aligned}\lambda x_1 + \mu x_2 + \gamma x_3 &= 0, \\ \lambda y_1 + \mu y_2 + \gamma y_3 &= 0, \\ \lambda z_1 + \mu z_2 + \gamma z_3 &= 0,\end{aligned}$$

因为 λ, μ, γ 不全为 0, 此齐次线性方程组有非零解, 所以

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

定理 1.5.6 设有向线段 $\overline{P_1P_2}$ 的始点为 $P_1(x_1, y_1, z_1)$, 终点为 $P_2(x_2, y_2, z_2)$, 则分有向线段 P_1P_2 成定比 λ ($\lambda \neq -1$) 的分点 P 的坐标为

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}$$

显然, 上式中 $\lambda = 1$ 是得到的就是中点坐标.

3. 课堂练习

习题课本 32 页第五题

4. 课堂小结

空间的一个定点 0, 连同三个不共面的有序向量 e_1, e_2, e_3 的全体, 叫做空间中的一个标架, 记做 $\{0; e_1, e_2, e_3\}$ 。如果 e_1, e_2, e_3 都是单位向量, 那么 $\{0; e_1, e_2, e_3\}$ 就叫做笛卡儿标架。两两互相垂直的标架叫做笛卡儿直角标架。在一般情况下, $\{0; e_1, e_2, e_3\}$ 叫做仿射标架。

标架一般是完全决定空间坐标系来用的, 所以空间坐标系也可以用标架 $\{0; e_1, e_2, e_3\}$ 来表示, 这时候点 0 就可以叫做坐标原点, 而向量 e_1, e_2, e_3 都叫做坐标向量。

当空间取定标架 $\{0; e_1, e_2, e_3\}$ 后, 空间全体向量的集合或者全体点的集合与全体有序三数组 x, y, z 的集合具有一一对应的关系, 这种一一对应的关系就叫做空间向量或点的一个坐标系。此时, 向量或点关于

标架 $\{O; e_1, e_2, e_3\}$ 的坐标，也称为该向量或点关于由这标架所确定的坐标系的坐标。标架是空间坐标系的向量化。

笛卡尔坐标系(Cartesian)- 系统用 X 、 Y 和 Z 表示坐标值。

柱坐标系(Cylindrical)- 系统用半径、 θ (q) 和 Z 表示坐标值。

球坐标系(Spherical)- 系统用半径、 θ (q) 和 ϕ (f) 表示坐标值。

5. 布置作业

课本 31、32 页

第 1、2、7、8 题

6. 板书设计

§ 1.5 标架与坐标		
<p>定义 1.5.1 直线上一个定点连同直线上一个非零向量 \bar{e} 叫做直线的标架，记作 $\{O; \bar{e}\}$。若 \bar{e} 是单位向量，则 $\{O; \bar{e}\}$ 叫笛卡儿标架，一般的标架称为仿射标架。</p> <p>定义 1.5.2 对于取定标架 $\{O; \bar{e}\}$ 的直线上任意点 P，向量 \overrightarrow{OP} 叫做点 P 的向径(径矢)，向径 \overrightarrow{OP} 关于标架 $\{O; \bar{e}\}$ 的分量 x 叫做点 P 关于标架 $\{O; \bar{e}\}$ 的坐标，记为 $P(x)$ 或 (x)。</p> <p>定义 1.5.3 在直线上取定标架 $\{O; \bar{e}\}$ 之后，直线上的点 P 就与向径 \overrightarrow{OP} 取得一一对应，而向径 \overrightarrow{OP} 通过关系式 $\overrightarrow{OP} = x\bar{e}$ 就与全体实数的集合之间取得一一对应，因此直线上的全部向量或点的集合与全体实数的集合之间取得了一一对应关系，这个一一对应关系</p>		

<p>叫做直线上的向量或点的坐标系. 若 $\{O; \bar{e}\}$ 是笛卡儿标架, 则由它决定的坐标系叫笛卡儿坐标系, 若 $\{O; \bar{e}\}$ 是仿射标架, 则由它决定的坐标系叫仿射坐标系.</p>		
<p>定义 1.5.4 平面上一个定点 O 连同平面上的两个不共线的有序向量 \bar{e}_1, \bar{e}_2 的全体叫做平面的一个标架, 记作 $\{O; \bar{e}_1, \bar{e}_2\}$. 若 \bar{e}_1, \bar{e}_2 都是单位向量, 则 $\{O; \bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ 叫笛卡儿标架, 若 \bar{e}_1, \bar{e}_2 不仅是单位向量而且相互垂直, 则 $\{O; \bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ 叫笛卡儿直角标架, 一般的标架 $\{O; \bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ 称为平面仿射标架.</p>		
<p>定义 1.5.5 公式 $\bar{r} = x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2$ 中的有序实数对 x, y 叫做向量 \bar{r} 对于标架 $\{O; \bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ 的分量或坐标.</p> <p>定义 1.5.6 对于取定标架 $\{O; \bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ 上的平面上任意点 P, 向量 \overrightarrow{OP} 叫做点 P 的向径 (径矢), 向径 \overrightarrow{OP} 关于标架 $\{O; \bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ 的分量 x, y 叫做点 P 关于标架 $\{O; \bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ 的坐标, 记为 $P(x, y)$ 或 (x, y).</p>		
<p>定义 1.5.7 空间上的一个定点 O 连同 3 个不共面的有序向量 $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ 的</p>		

<p>全体叫做空间的一个标架，记作 $\{O; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$. 若 $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ 都是单位向量，则 $\{O; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ 叫笛卡儿标架，若 $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ 不仅是单位向量而且两两垂直，则 $\{O; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ 叫笛卡儿直角标架，一般的标架 $\{O; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ 称为空间仿射标架</p>		
<p>定义 1.5.8 公式 $\vec{r} = x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2 + z\bar{e}_3$ 中的有序实数组 x, y, z 叫做向量 \vec{r} 对于标架 $\{O; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ 的分量或坐标，记作 $\vec{r}(x, y, z)$ 或 $\{x, y, z\}$.</p> <p>定义 1.5.9 对于取定标架 $\{O; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ 的空间中的任意点 P，向量 \overrightarrow{OP} 叫做点 P 的向径（径矢），向径 \overrightarrow{OP} 关于标架 $\{O; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ 的分量 x, y, z 叫做点 P 关于标架 $\{O; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ 的坐标，记为 $P(x, y, z)$ 或 (x, y, z).</p>		
<p>定理 1.5.1 向量的分量等于其终点的坐标减去其起点的坐标.</p> <p>即设 $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$，则 $\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$</p> <p>定理 1.5.2 两向量的和分量等于其对应的分量的和</p>		
<p>定理 1.5.3 数乘向量时，$k\{x, y,$</p>		

<p>$z\} = \{k x, k y, k z\}$.</p> <p>定理 1.5.4 $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$, 则 \vec{a}, \vec{b} 共线的充要条件是</p> <p>定理 1.5.5 三向量 $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$, $\vec{c} = \{x_3, y_3, z_3\}$ 共面的充要条件是</p> $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$		
<p>定理 1.5.6 设有向线段 $\overline{P_1P_2}$ 的起点为 $P_1(x_1, y_1, z_1)$, 终点为 $P_2(x_2, y_2, z_2)$, 则分有向线段 P_1P_2 成定比 λ ($\lambda \neq -1$) 的分点 P 的坐标为</p> $x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}$ <p>显然, 上式中 $\lambda = 1$ 是得到的就是中点坐标.</p>		

五、教学反思

1. 运用 PPT 讲课件可以节省许多授课时间, 课堂形式多样化, 改变了传统教学的单一化;
2. 能生动、直观、形象地展示教学内容, 便于学生从感性上更好的认识事物, 便于笔记;
3. 不过对老师提出更高的要求, 要做课件工作量有点大;
4. 有时候速度过快, 内容太抽象, 有些同学跟不上进度;
5. 学生上课有些睡觉, 班级气氛不够好;
6. 上去黑板做题的同学还是有, 然后同学回答问题也是有的;
7. 上课没有讲小话的学生。

§ 1.6 向量在轴上的射影

授课学时：1 学时

一、教学目标：

1. 了解向量在轴上的投影矢量的概念；
2. 掌握投影与向量模及夹角的关系。

二、教学重难点

1. 教学重点：向量投影的计算
2. 教学难点：向量投影的证明。

三、教学方法

多媒体辅助教学、讲练和探究式

四、教学过程

1. 导入

2. 讲解新知

定义 1.6.1 设向量 \overrightarrow{AB} 的始点 A 和终点 B 在 l 轴上的射影分别为 A' 和 B' ，那么向量 $\overrightarrow{A'B'}$ 叫做向量 \overrightarrow{AB} 在 l 轴上的射影向量（图 1--28），记做射影向量 ${}_l\overrightarrow{AB}$

如果在轴上取与轴同方向的单位向量 e ，那么有

$$\text{射影向量 } {}_l\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} = xe$$

这里的 x 叫做向量 \overrightarrow{AB} 在 l 轴上的射影，记做射影 ${}_lAB$ ，即

$$\text{射影 } {}_lAB = x$$

我们也可以把射影向量 ${}_l\overrightarrow{AB}$ 与射影 ${}_lAB$ 分别写成

$$\text{射影向量 } \overrightarrow{A'B'} \text{ 与射影 } AB,$$

并且可以分别叫做 \overrightarrow{AB} 在向量 e 上的射影向量与 \overrightarrow{AB} 在向量 e 上的射影，两者之间的关系是：

射影

定理 1.6.1 向量 \overrightarrow{AB} 在轴 l 上的射影等于向量的模 $|\overrightarrow{AB}|$ 乘以轴与该向量的夹角 θ 的余弦：

射影

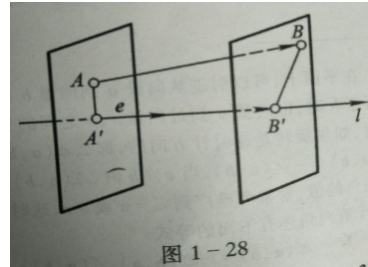


图 1-28

公式；
公式的证明

结合教学法

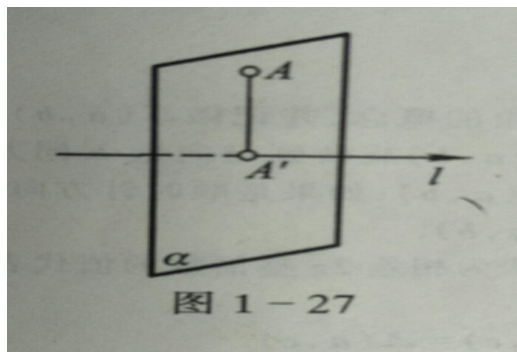


图 1-27

向量 \overrightarrow{AB} 在轴 l 上的射影 ${}_l\overrightarrow{AB}$ 等于向量的模 $|\overrightarrow{AB}|$ 乘以轴与该向量的夹角 θ 的余弦：

$${}_l\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| \cos \theta, \theta =$$

$\angle(1, \mathbf{AB})$

证 当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时, 命题显然成立。当 $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ 时, 过 A、B 两点分别作垂直于 l 轴的平面 α, β , 它们与轴 l 之间的交点分别是 A', B' 那么 $A'B' = \text{射影向量 } {}_1\mathbf{AB}$. 再作 $A'B_1 = \mathbf{AB}$, 易知终点 B_1 必在 β 平面上。

因为 $\beta \perp l$, 所以 $B_1B' \perp l$, $\triangle A'B'B_1$ 为直角三角形, 且 $\angle(1, A'B) = \angle(1, \mathbf{AB}) = \theta$. (图 1-30)。设 \mathbf{e} 为 l 上与 l 同方向的单位向量, 那么

$$A'B' = x\mathbf{e}$$

所以 $x = \text{射影 } {}_1\mathbf{AB}$

当 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 时, $A'B'$ 与 \mathbf{e} 同向,

$$x = |A'B'| = |A'B_1| \cos \theta = |\mathbf{AB}| \cos \theta;$$

当 $0 < \theta < \pi$ 时, $A'B'$ 与 \mathbf{e} 反向,

$$x = -|A'B'| = -|A'B_1| \cos \theta$$

$$(|\pi - \theta|) = |\mathbf{AB}| \cos \theta$$

当 $0 < \theta < \pi$ 时, 总有

$$\text{射影 } {}_1\mathbf{AB} = |\mathbf{AB}| \cos \theta$$

推论 相等向量在同一轴上的射影相等

定理 1.6.2 对于任何向量 \mathbf{a}, \mathbf{b} 有

$$\text{射影 } {}_1(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \text{射影 } {}_1\mathbf{a} + \text{射影 } {}_1\mathbf{b} \quad (1.6-3)$$

证 取 $\mathbf{AB} = \mathbf{a}, \mathbf{BC} = \mathbf{b}$, 那么有 $\mathbf{AC} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ (图 1-31), 设 A', B', C' 分别是 A, B, C 在轴 l 上的射影, 那么显然有 $A'C' = A'B' + B'C'$,

因为 $A'C' = \text{射影向量 } {}_1\mathbf{AC}, A'B' = \text{射影向量 } {}_1\mathbf{AB},$

$$B'C' = \text{射影向量 } {}_1\mathbf{BC},$$

所以 射影向量 ${}_1\mathbf{AC} = \text{射影向量 } {}_1\mathbf{AB} + \text{射影向量 } {}_1\mathbf{BC}$.

由 (1.6-1) 得

$$(\text{射影 } {}_1\mathbf{AC}) \mathbf{e} = (\text{射影 } {}_1\mathbf{AB} + \text{射影 } {}_1\mathbf{BC}) \mathbf{e}$$

其中 \mathbf{e} 为轴 l 上与 l 同方向的单位向量, 所以

$$\text{射影 } {}_1\mathbf{AC} = \text{射影 } {}_1\mathbf{AB} + \text{射影 } {}_1\mathbf{BC},$$

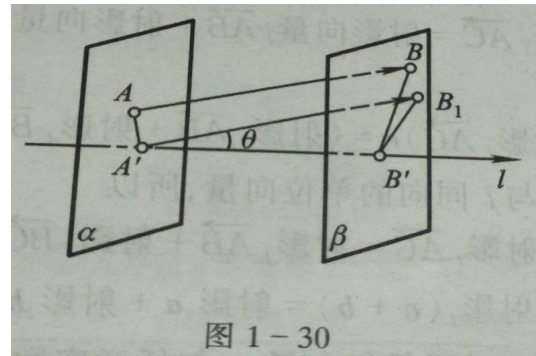


图 1-30

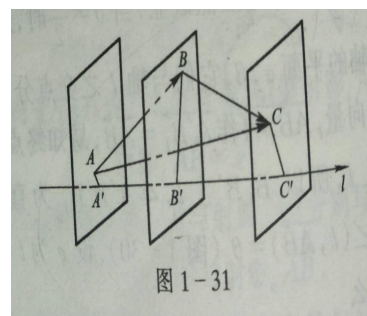


图 1-31

或 射影_l(a+b)=射影_la+射影_lb
射影

定理 1.6.3 对于任何向量 a 与任意实数有 $l(\lambda a) = \lambda \text{射影}_l a$

例 设在直角坐标系 $\{O; i, j, k\}$ 下, 向量 $a=Xi+Yj+Zk$, 试证明:
射影_ia=X, 射影_ja=Y, 射影_ka=Z.

证 设向径 $OP=a$, 那么 a 在坐标轴上的射影即为 OP 在坐标轴上的射影。

设 P 点在 X 轴, Y 轴, Z 轴上的射影分别为 A, B, C(图 1—32), 那么

射影向量_ia=OA=Xi

射影向量_ja=OB=Yj

射影向量_ka=OC=Zk

由向量在轴上的射影定义得

射影_ia=X, 射影_ja=Y, 射影_ka=Z

3. 课堂练习

课本 37 页习题第 1 题

4. 课堂小结

1. 矢量在轴上的射影及射影矢量概念;

2. 矢量在轴上的射影及射影矢量的计算。

5. 布置作业

课本 37 页习题第 2 题

6. 板书设计

§ 1.6 向量在轴上的射影	
定义 1.6.1 设向量 AB 的始点 A 和终点 B 在 l 轴上的射影分别为 A' 和 B', 那么向量 A'B' 叫做向量 AB 在 l 轴上的射影向量 (图 1—28), 记做射影向量 lAB	

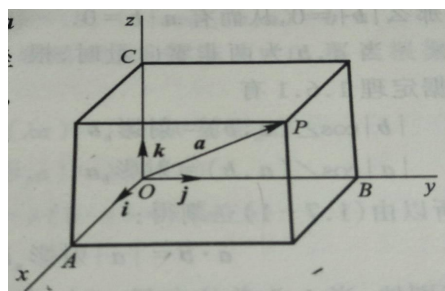


图 1—32

<p>定理. 1. 6. 1 向量 \mathbf{AB} 在轴 l 上的射影等于向量的模乘以轴与该向量的夹角的余弦： 射影 ${}_l\mathbf{AB} = \mathbf{AB} \cos\theta$, $\theta = \angle(l, \mathbf{AB})$ 推论 相等向量在同一轴上的射影相等</p>		
<p>定理 1. 6. 3 对于任何向量 \mathbf{a} 与任意实数有 $l(\lambda \mathbf{a}) = \lambda \text{射影}_l \mathbf{a}$ 射影向量 ${}_i\mathbf{a} = \mathbf{OA} = X\mathbf{i}$ 射影向量 ${}_j\mathbf{a} = \mathbf{OB} = Y\mathbf{j}$ 射影向量 ${}_k\mathbf{a} = \mathbf{OC} = Z\mathbf{k}$ 由向量在轴上的射影定义得射影 ${}_i\mathbf{a} = X$, 射影 ${}_j\mathbf{a} = Y$, 射影 ${}_k\mathbf{a} = Z$</p>		

五、教学反思

1. 运用 PPT 讲课件可以节省许多授课时间，课堂形式多样化，改变了传统教学的单一化；
2. 能生动、直观、形象地展示教学内容，便于学生从感性上更好的认识事物，便于笔记；
3. 不过对老师提出更高的要求，要做课件工作量有点大；
4. 有时候速度过快，内容太抽象，有些同学跟不上进度；
5. 学生上课有些睡觉，班级气氛不够好；
6. 上去黑板做题的同学还是有，然后同学回答问题也是有的；
7. 上课没有讲小话的学生。

§ 1.7 两向量的数量积

授课学时：2 学时

一、 教学目标

1. 理解平面向量数量积的含义及其物理意义；
2. 掌握向量数量积的性质和运算律，会进行平面向量数量积的运算；
3. 通过向量的线性运算及多项式乘法运算的对照，强化学生的类比思想；
4. 锻炼学生联系、对应、转化的辩证思想；
5. 运用数形结合的思想方法，激发学生观察、分析、探求的兴趣和热情；
6. 培养学生积极探索的科学态度，让学生体会到教学问题从具体到抽象

的转化过程。

二、 教学重难点

1. 重点

向量的数量积的概念和性质；用向量数量积表示向量的模及向量夹角；向量数量积的运算律的探究及运用。

2. 难点

向量的数量积的定义及对运算律的探究、理解；向量数量积的灵活运用。

三、 教学方法

多媒体辅助教学、讲练和探究式结合教学法、课间师生互动教学

四、 教学过程

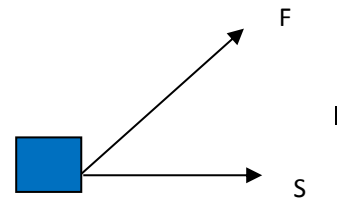
1. 导入：

如图所示，一物体在力 F 的作用下产生位移 S ，那么力 F 所做的功：

$$W = |\vec{F}| |\vec{S}| \cos \theta$$



思考：这个公式有什么特点？



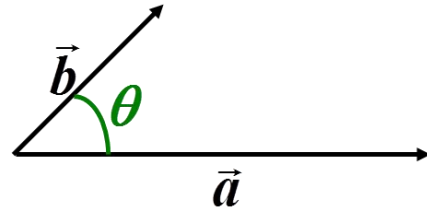
2. 讲授新知

定义 1.7.1

两个向量 a, b 的模和它们夹角余弦的乘积叫

做向量 \vec{a} 和 \vec{b} 的数量积,也称为内积或点积.记为 $\vec{a} \cdot \vec{b}$

或 $\vec{a}\vec{b}$. 即 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$



★思考:向量的数量积运算与线性运算的结果有什么不同?影响数量积大小的因素有哪些?

3. 例题讲解

例 1: 已知 $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 6$, 当① $\vec{a} \parallel \vec{b}$, ② $\vec{a} \perp \vec{b}$, ③ \vec{a} 与 \vec{b} 的夹角是 60° 时, 分别求 $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

解: ①当 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ 时, 若 \vec{a} 与 \vec{b} 同向, 则它们的夹角 $\theta = 0^\circ$,

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos 0^\circ = 3 \times 6 \times 1 = 18;$$

若 \vec{a} 与 \vec{b} 反向, 则它们的夹角 $\theta = 180^\circ$,

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 180^\circ = 3 \times 6 \times (-1) = -18;$$

②当 $\vec{a} \perp \vec{b}$ 时, 它们的夹角 $\theta = 90^\circ$,

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = 0;$$

③ \vec{a} 与 \vec{b} 的夹角是 60° 时, 有

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 60^\circ = 3 \times 6 \times \frac{1}{2} = 9$$

4. 定理 1.7.1

$$(1) \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2.$$

证: $\because \theta = 0, \therefore \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| |\vec{a}| \cos \theta = |\vec{a}|^2.$

$$(2) \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \mid |\vec{a}| \neq 0, |\vec{b}| \neq 0, \iff \vec{a} \perp \vec{b}. (\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0})$$

证: $(\Rightarrow) \because \vec{a} \cdot \vec{b} = 0, |\vec{a}| \neq 0, |\vec{b}| \neq 0,$

$$\therefore \cos \theta = 0, \theta = \frac{\pi}{2}, \therefore \vec{a} \perp \vec{b}.$$

$$(\Leftarrow) \because \vec{a} \perp \vec{b}, \therefore \theta = \frac{\pi}{2}, \therefore \cos \theta = 0,$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta = 0.$$

5. 数量积的运算规律:

(1) 交换律: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a};$

(2) 分配律: $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c};$

(3) 数因子的结合律: $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}) = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b})$

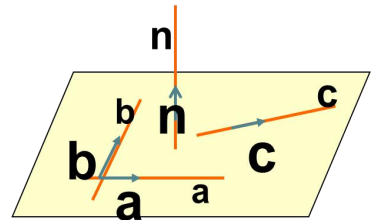
$$(\lambda \vec{a}) \cdot (\mu \vec{b}) = \lambda \mu (\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

例 2 证明 如果一条直线与一个平面内的两条相交直线都垂直,则它就和平
面内任何直线都垂直,即它垂直于平面.

证明: $\because a, b, c$ 共面, $\therefore c = \lambda a + \mu b,$

又 $n \perp a, n \perp b, \therefore n \cdot a = 0, n \cdot b = 0$

从而, $n \cdot c = n \cdot (\lambda a + \mu b) = \lambda (n \cdot a) + \mu (n \cdot b) = 0$



6. 两向量的数量积的运用

(1) 数量积的坐标表达式

$$\text{设 } \vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}, \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \cdot (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k})$$

$$\because \vec{i} \perp \vec{j} \perp \vec{k}, \therefore \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0,$$

$$\therefore |\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1,$$

$$\therefore \vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1.$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

(2) 向量模的坐标表达式

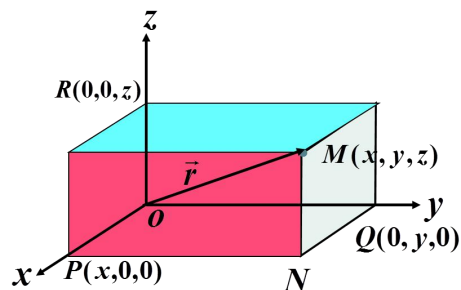
$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}$$

$$\text{由勾股定理 } |\vec{r}| = |OM| = \sqrt{|OP|^2 + |OQ|^2 + |OR|^2}$$

$$\text{由 } \overrightarrow{OP} = x\vec{i}, \overrightarrow{OQ} = y\vec{j}, \overrightarrow{OR} = z\vec{k}.$$

$$\text{有 } |OP| = |x|, |OQ| = |y|, |OR| = |z|,$$

$$\therefore |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$



(3) 空间两点间距离公式

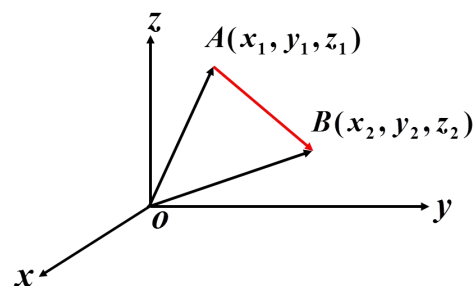
设 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ 为空间两点.

$$d = |\overrightarrow{AB}|$$

由

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \{x_2, y_2, z_2\} - \{x_1, y_1, z_1\} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

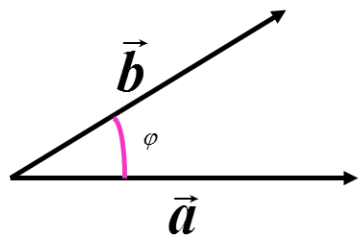


(4) 空间两向量的夹角

$$\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0},$$

向量 \vec{a} 与向量 \vec{b} 的夹角

$$\varphi = (\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a}) \quad (0 \leq \varphi \leq \pi)$$



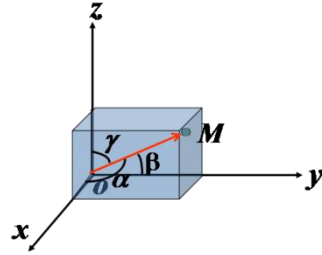
特殊地, 当两个向量中有一个为零向量时, 规定它们的夹角可在 0 与 π 之间任意取值.

(5) 向量的方向角

非零向量 \overrightarrow{OM} 的方向角: α 、 β 、 γ

非零向量与三条坐标轴的正向的夹角称为方向角.

$$0 \leq \alpha \leq \pi, 0 \leq \beta \leq \pi, 0 \leq \gamma \leq \pi.$$



(6) 两向量夹角余弦的坐标表示式

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$$

$$\cos \theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

由此可知两向量垂直的充要条件为: $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

7. 运用举例

例 2. 已知, $\vec{a} = \{1, 1, -4\}$, $\vec{b} = \{1, -2, 2\}$, 求 (1) $\vec{a} \cdot \vec{b}$; (2) \vec{a} 与 \vec{b} 的夹角.

解: (1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) + (-4) \cdot 2 = -9$

$$(2) \cos \theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

例 3 试证: 三角形的三高线交于一点 .

证明: 设 $\triangle ABC$ 的 BC, AC 两边上的高交于 P 点, 要证

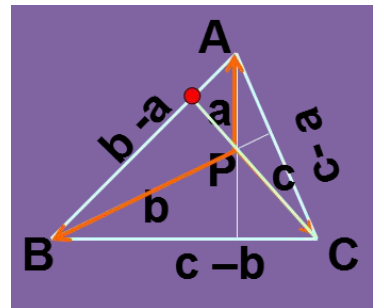
$PC \perp AB$

$\because PA \perp BC$,

$\therefore a(c-b) = 0$, 即 $ac - ab = 0$, 从而 $ac = ab$

$\therefore b(c-a) = 0$, 即 $bc = ab$;

于是, $bc = ac$, $c(b-a) = 0$, 即 $\overrightarrow{PC} \perp \overrightarrow{AB}$.



例4. 证明向量 \vec{c} 与向量 $(\vec{a}\vec{c})\vec{b} - (\vec{b}\vec{c})\vec{a}$ 垂直.

$$\begin{aligned}\text{证明: } [(\vec{a}\vec{b})\vec{c} - (\vec{b}\vec{a})\vec{c}] &= [(\vec{a}\vec{b})\vec{b}\vec{c} - (\vec{b}\vec{c})\vec{a}\vec{c}] \\ &= (\vec{c}\vec{b})[\vec{a}\vec{c} - \vec{a}\vec{c}] \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\therefore [(\vec{a}\vec{c})\vec{b} - (\vec{b}\vec{c})\vec{a}] \perp \vec{c}$$

8. 课堂小结

(1) .两向量的数量积是一个数量;

(2) .数量积在向量的模、两点间的距离、两向量的夹角等方面的运用。

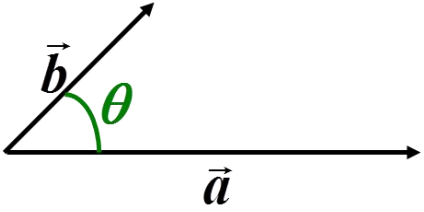
9. 思考题:

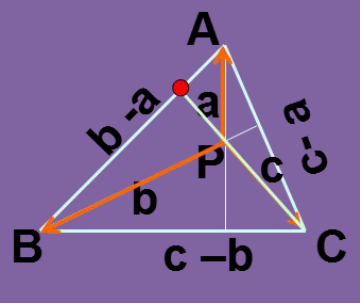
两向量相乘什么情况下结果是向量?

10. 布置作业

P46 1 (2); 2 (2)、(3)

11. 板书设计

<p>① 定义：两个向量 a, b 的模和它们夹角余弦的乘积叫做向量 \vec{a} 和 \vec{b} 的数量积, 也称为内积或点积. 记为 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 或 $\vec{a}\vec{b}$. 即 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \vec{b} \cos \theta$</p> <p>② (1) $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a} ^2$.</p> <p>证： $\because \theta = 0,$</p>  <p>$\therefore \vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a} \vec{a} \cos \theta$</p> <p>(2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ $\vec{a} \neq 0, \vec{b} \neq 0,$ $\iff \vec{a} \perp \vec{b}.$ $(\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0})$</p> <p>证： $(\implies) \because \vec{a} \cdot \vec{b} = 0, \vec{a} \neq 0,$ $\vec{b} \neq 0,$ $\therefore \cos \theta = 0, \theta = \frac{\pi}{2},$ $\therefore \vec{a} \perp \vec{b}.$</p> <p>$(\impliedby) \because \vec{a} \perp \vec{b}, \therefore \theta =$</p>	<h3>§ 1.7 两向量的数量积</h3> <p>例 1. 例 1: 已知 $\vec{a} = 3,$ $\vec{b} = 6,$ 当① $\vec{a} \parallel \vec{b},$ ② $\vec{a} \perp \vec{b},$ ③ \vec{a} 与 \vec{b} 的夹角是 60° 时, 分别求 $\vec{a} \cdot \vec{b}.$</p> <p>解: ① 当 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ 时, 若 \vec{a} 与 \vec{b} 同向, 则它们的夹角 $\theta = 0^\circ,$</p> <p>$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} \cos 0^\circ = 3 \times 6 \times 1 = 18;$</p> <p>若 \vec{a} 与 \vec{b} 反向, 则它们的夹角 $\theta = 180^\circ,$</p> <p>$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \vec{b} \cos 180^\circ = 3 \times 6 \times (-1) = -18;$</p> <p>② 当 $\vec{a} \perp \vec{b}$ 时, 它们的夹角 $\theta = 90^\circ,$</p> <p>$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = 0;$</p> <p>③ \vec{a} 与 \vec{b} 的夹角是 60° 时, 有</p> <p>$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \vec{b} \cos 60^\circ = 3 \times 6 \times \frac{1}{2} = 9$</p> <p>例 2. 已知, $\vec{a} = \{1, 1, -4\}, \vec{b} = \{1, -2, 2\},$ 求 (1) $\vec{a} \cdot \vec{b};$ (2) \vec{a} 与 \vec{b} 的夹角。</p> <p>解: (1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) + (-4) \cdot 2 = -9$</p>	<p>练习题： P46-P47 1-6 题</p>
--	--	---

<p>$\frac{\pi}{2}$, $\therefore \cos \theta = 0$,</p> <p>$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \vec{b} \cos \theta = 0$.</p> <p>③ 小结:</p> <p>(1) 两向量的数量积是一个数量;</p> <p>(2) 数量积在向量的模、两点间的距离、两向量的夹角等方面的运用。</p>	<p>(2) $\cos \theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$</p> <p>$= -\frac{1}{\sqrt{2}}$</p> <p>例3. 试证: 三角形的三高线交于一点 .</p> <p>证明: 设$\triangle ABC$的BC, AC两边上的高交于P点, 要证 $PC \perp AB$</p>  <p>$\because PA \perp BC$,</p> <p>$\therefore a(c-b)=0$,</p> <p>即 $ac-ab=0$, 从而 $ac = ab$</p> <p>$\therefore b(c-a)=0$, 即 $bc = ab$;</p> <p>于是, $bc = ac$, $c(b-a)=0$, 即 $\overrightarrow{PC} \perp \overrightarrow{AB}$.</p> <p>例4. 证明向量 \vec{c} 与向量 $(\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a}$ 垂直.</p> <p>证明: $[(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} - (\vec{b} \cdot \vec{a})\vec{c}] = [(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{b} \cdot \vec{c} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a} \cdot \vec{c}]$</p> $= (\vec{c} \cdot \vec{b})[\vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{c}] = 0$ <p>$\therefore [(\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a}] \perp \vec{c}$</p>
---	---

五、教学反思

1、对教师自身教学状况的反思

在本章节的教学教学中, 我用时两个课时 授课语音平和, 语言丰富, 授课面带微笑, 与同学合作融洽, 在本章节的学习, 有个别同学睡觉。我也很尊重他们的看法, 整

个教学过程顺序有序。

2、对学生的状况反思

学生听课认真态度良好，小组讨论有激情，同学们的观点大多一致，没有异类观点，另外有的同学开动脑筋解决了难题，对于睡觉的同学，课后我认真跟她交谈，他保证下次不再睡觉，会认真听课。

3、对授课内容方式的反思

本章节学习了向量数量积的定义定理，还有推论我与同学们相互交流，共同学习，本章节结束后，我认为比预期的较好，我感觉本节课是成功的。

§ 1.8 两向量的向量积

授课学时：2 学时

一、 教学目标

1. 理解平面向量向量积的含义及其物理意义；
2. 掌握向量积的性质和运算律，会进行平面向量积的运算；
3. 通过向量的线性运算及多项式乘法运算的对照，强化学生的类比思想
4. 锻炼学生联系、对应、转化的辩证思想；
5. 运用数形结合的思想方法，激发学生观察、分析、探求的兴趣和热情；
6. 培养学生积极探索的科学态度，让学生体会数学问题从具体到抽象的转化过程。

二、教学重难点

1. 教学重点：向量积的定理、向量积的性质，向量积的运算律；
2. 教学难点：根据向量积的定理和运算律，熟练的对习题进行解答。

三、教学方法

多媒体辅助教学和探究式教学法

四、教学过程

1. 导入

(1) 物理学中的力矩是一个向量，这是两个向量的向量积的实例，如图 1-39，如果；力 f 的作用点是 A ， $OA=r$ ，那么力矩 $m=r \times f$ 。

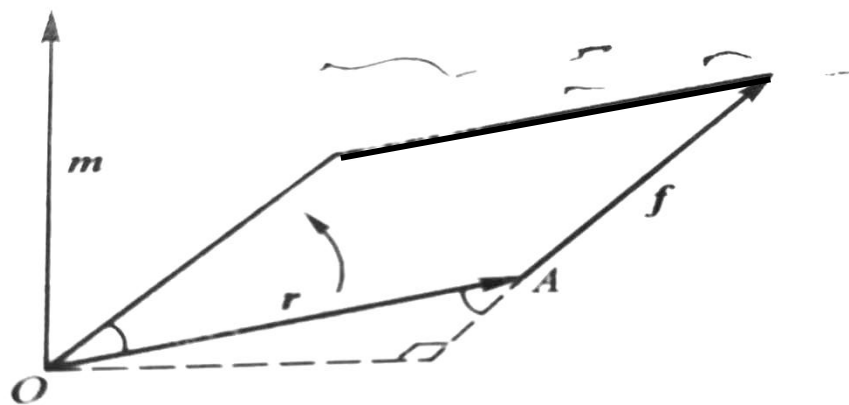


图 1 - 39

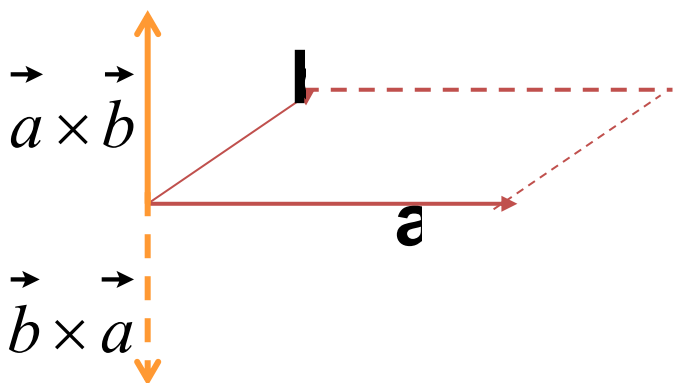
(2) 思考：通过该例题我们可以得到什么结论呢？

2. 讲解新知

(1) 定义 1.8.1 两向量 a 与 b 的向量积是一个向量,记作 $a \times b$
它的模是

$$|a \times b| = |a| |b| \sin \angle(a, b) \quad (1.8-1)$$

它的向量与 a, b 都垂直, 且按 $a, b, a \times b$ 构成右手系。



因为平行四边形的面积等于它的两邻边长的积乘以夹角的正弦, 所以由 (1.8-1) 有:

定理 1.8.1 两不共线向量 a, b 的向量积的模, 等于以 a, b 为边所构成的平行四边形的面积。

定理 1.8.2 两向量 a, b 共线的充要条件是 $a \times b = 0$

证明: 当 a, b 共线时, 则 $|a \times b| = 0$, 于是 $a \times b = 0$, 反之, 当 $|a \times b| = 0$ 时, 由定义, 有 $a=0$ 或者 $b=0$, 或者 $a // b$, 所以不管怎样, 总有 $a // b$.

定理 1.8.3 两向量 a, b 的向量积满足反交换律, 即:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a} \quad (1.8-2) \quad (\text{证明略})$$

定理 1.8.4 两向量 \mathbf{a}, \mathbf{b} 的向量积关于数因子满足结合律, 即:

$$\lambda (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\lambda \mathbf{b}) \quad (1.8-3)$$

证明: 当 $\lambda = 0$ 或者 \mathbf{a}, \mathbf{b} 共线时, 结论显然成立。

当 $\lambda \neq 0$ 或者 \mathbf{a}, \mathbf{b} 不共线时, 因为

$$|\lambda (\mathbf{a} \times \mathbf{b})| = |\lambda| |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

$$|(\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b}| = |\lambda| |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

$$|\mathbf{a} \times (\lambda \mathbf{b})| = |\lambda| |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

即它们的模相等, 且 $\lambda > 0$ 时, 它们的方向与 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 同向;

$\lambda < 0$ 时, 它们的方向与 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 反向。

因此三个矢量方向相同。从而定理成立。

推论: 当 λ, μ 为任意实数时, 有: $(\lambda \mathbf{a}) \times (\mu \mathbf{b}) = \lambda \mu (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$

定理 1.8.5 向量积满足分配律. 即

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} \quad (1.8-5)$$

(证明略)

推论: $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$

在直角坐标系下, 用坐标的分量表示两向量的向量积

定理 1.8.6 在直角坐标系下, 如果

$$\mathbf{a} = X_1 \mathbf{i} + Y_1 \mathbf{j} + Z_1 \mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = X_2 \mathbf{i} + Y_2 \mathbf{j} + Z_2 \mathbf{k},$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \text{ 则有 } \mathbf{a} \times \mathbf{b} = X_2 \begin{vmatrix} Z_1 & Z_1 \\ Z_2 & Z_2 \end{vmatrix} \mathbf{i} + X_2 \begin{vmatrix} X_1 & X_1 \\ X_2 & X_2 \end{vmatrix} \mathbf{j} + X_2 \begin{vmatrix} Y_1 & Y_1 \\ Y_2 & Y_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

证明: 因为 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (X_1 \mathbf{i} + Y_1 \mathbf{j} + Z_1 \mathbf{k}) \times (X_2 \mathbf{i} + Y_2 \mathbf{j} + Z_2 \mathbf{k})$

$$= X_1 X_2 (\mathbf{i} \times \mathbf{i}) + X_1 Y_2 (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) + X_1 Z_2 (\mathbf{i} \times \mathbf{k}) + Y_1 X_2 (\mathbf{j} \times \mathbf{i}) + Y_1 Y_2 (\mathbf{j} \times \mathbf{j})$$

$$+ Y_1 Z_2 (\mathbf{j} \times \mathbf{k}) + Z_1 X_2 (\mathbf{k} \times \mathbf{i}) + Z_1 Y_2 (\mathbf{k} \times \mathbf{j}) + Z_1 Z_2 (\mathbf{k} \times \mathbf{k}).$$

由于

$$i \times i = 0 \quad j \times j = 0 \quad k \times k = 0 \quad i \times j = k \quad j \times k = i \quad k \times i = j$$

$$j \times i = -k \quad k \times j = -i \quad i \times k = -j$$

$$\text{所以上式} = (Y_1 Z_2 - Y_2 Z_1) i + (Z_1 X_1 - Z_2 X_1) j + (X_1 Y_2 - X_2 Y_1) k$$

即定理成立。

3. 例题讲解

例 1 证明 $(\mathbf{a}-\mathbf{b}) \times (\mathbf{a}+\mathbf{b}) = 2(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$, 并说明它的几何意义.

$$\text{证 } (\mathbf{a}-\mathbf{b}) \times (\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \mathbf{a} \times \mathbf{a} - \mathbf{b} \times \mathbf{a} + \mathbf{a} \times \mathbf{b} - \mathbf{b} \times \mathbf{b}$$

$$= 0 - \mathbf{b} \times \mathbf{a} + \mathbf{a} \times \mathbf{b} - 0$$

$$= \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{b} = 2(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

它的几何意义是: 平行四边形面积的两倍等于以它的对角线为边的平行四边形的面积.

例 2 证明 $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2 + (\mathbf{a} \bullet \mathbf{b})^2 = a^2 b^2$ (1.8—7)

证 因为

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2 = a^2 b^2 \sin^2 \angle (\mathbf{a}, \mathbf{b}),$$

$$(\mathbf{a} \bullet \mathbf{b})^2 = a^2 b^2 \cos^2 \angle (\mathbf{a}, \mathbf{b}),$$

所以

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2 + (\mathbf{a} \bullet \mathbf{b})^2 &= a^2 b^2 [\sin^2 \angle (\mathbf{a}, \mathbf{b}) + \cos^2 \angle (\mathbf{a}, \mathbf{b})] \\ &= a^2 b^2. \end{aligned}$$

4. 课堂练习

P52 (1)

1. 已知 $|\mathbf{a}|=1, |\mathbf{b}|=5, \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}=3$, 试求:

(1) $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$; (2) $[(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - \mathbf{b})]^2$;
(3) $[(\mathbf{a} - 2\mathbf{b}) \times (\mathbf{b} - 2\mathbf{a})]^2$.

解 $\cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|} = \frac{3}{5}$,

所以 $\sin \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sqrt{1 - \cos^2 \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})} = \frac{4}{5}$.

(1) $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \sin \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 4$;

(2) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = -\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{a} = -2\mathbf{a} \times \mathbf{b}$,

所以 $[(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - \mathbf{b})]^2 = 4|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = 4 \times 4^2 = 64$.

(3) $(\mathbf{a} - 2\mathbf{b}) \times (\mathbf{b} - 2\mathbf{a}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + 4\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -3\mathbf{a} \times \mathbf{b}$,

所以 $[(\mathbf{a} - 2\mathbf{b}) \times (\mathbf{b} - 2\mathbf{a})]^2 = 9|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = 9 \times 4^2 = 144$.

5. 课堂小结

- (1) 两向量的向量积是一个向量;
- (2) 向量积在向量的模、两点间的距离、两向量的夹角等方面的应用。

6. 布置作业

课本 53 页: 3、4、5、6、7

7. 板书设计

<p>一. 定理</p> <p>定理 1.8.1 定理 1.8.2 定理 1.8.3 定理 1.8.4 定理 1.8.5 定理 1.8.6</p>	<p>§1.8 两向量的向量积</p> <p>例题讲解及定理证明</p> <p>1. 2. 3. 4.</p>	<p>三. 课后作业</p> <p>课本 53 页: 3、4、5、6、7</p>
---	---	--

8. 教学反思

(1) 本节课的设想与基本流程:

本节课主要研究向量的向量积，在学习该节的向量积之前我先带着同学们简单回顾了向量的数量积。通过向量数量积的物理意义来让学生了解向量积的物理意义及相关定义定理，同时强调同学们要注意区分向量的数量积和矢量积。在讲解每个定义定理前先让同学们自行看到例题，最后挑一部分课后习题让同学到黑板上解答，但在课堂上我发现如果完全按照我心情的设想去做是行不通的，故当我适当的进行教学调整：比如，对于学生很难理解的部分，我先给他们进行讲解相关理论知识，然后让他们看例题，然后从课后习题中挑选几个合适的题，让学生自愿到黑板上进行解答。另外，有的定义定理尽管有些难，但课本上并没有附有相应的例题，对于这样的情况，我并给学生额外找几个题做做。像例 1 这样的题目，虽然比较简单，但却很容易出错，这一点说明他们把向量积满足反交换律与数量积满足交换律混淆了。

(2) 几点体会

① 本节课在设计时可以把例题、练习题和相关的基本概念紧密结合，这样不仅可以练习中进一步理解巩固基本概念，还可以从中找到解题技巧；

② 让学生经历数学知识的形成与应用过程；

③ 应该鼓励学生自主探索，自主学习；

④ 课堂语言还需要进一步提炼；

教师如何在课堂上合理分配各环节的

§1.9 三向量的混合积

授课学时：2 学时

一、教学目标

1. 理解向量混合积的概念和性质；
2. 熟悉向量混合积公式定理；
3. 与 § 1.7 的数量积和向量积对照，加深理解和记忆；
4. 学会混合积的运用.

二、教学重难点

1. 重点：(1) 混合积的定义与性质；
(2) 混合积的公式定理.
2. 难点：(1) 向量混合积的实际运用；
(2) 向量混合积、数量积与向量积的区分.

三、数学方法：多媒体辅助教学、讲练和探求式相结合教学法、师生课间互动教学法

四、教学过程

1. 定义 1.9.1: 给空间的三个向量 \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , 如果先作前两个向量 \vec{a} 与 \vec{b} 的向量积, 再作所得的向量与第三个向量 \vec{c} 的数量积, 最后得到的这个数叫做三向量 \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} 的混合积, 记做 $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ 或 $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ 或 $(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$.

2. 定理 1.9.1: 三个不共面向量 \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , 的混合积的绝对值等于以 \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} 为棱的平行六面体的体积 V , 并且当 \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} 构成右手系时混合积是正数; 当 \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} 构成左手系时, 混合积是负数, 也就是有

$$(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = \varepsilon V,$$

当 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 是右手系时 $\varepsilon = 1$; 当 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 是左手系时 $\varepsilon = -1$.

证: 由于 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 三向量不共面 (图如 P55 图 1-43), 把它们归纳到共同的始点 O 可以构成以 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 为棱的平行六面体, 它的底面是以 \vec{a}, \vec{b} 为边的平行四边形, 面积为

$S = |\vec{a} \times \vec{b}|$, 它的高 $|\overline{OH}| = h$, 它的体积为 $V = S \cdot h$.

根据数量积定义

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = |\vec{a} \times \vec{b}| |\vec{c}| \cos \theta = S |\vec{c}| \cos \theta, \dots\dots \textcircled{1}$$

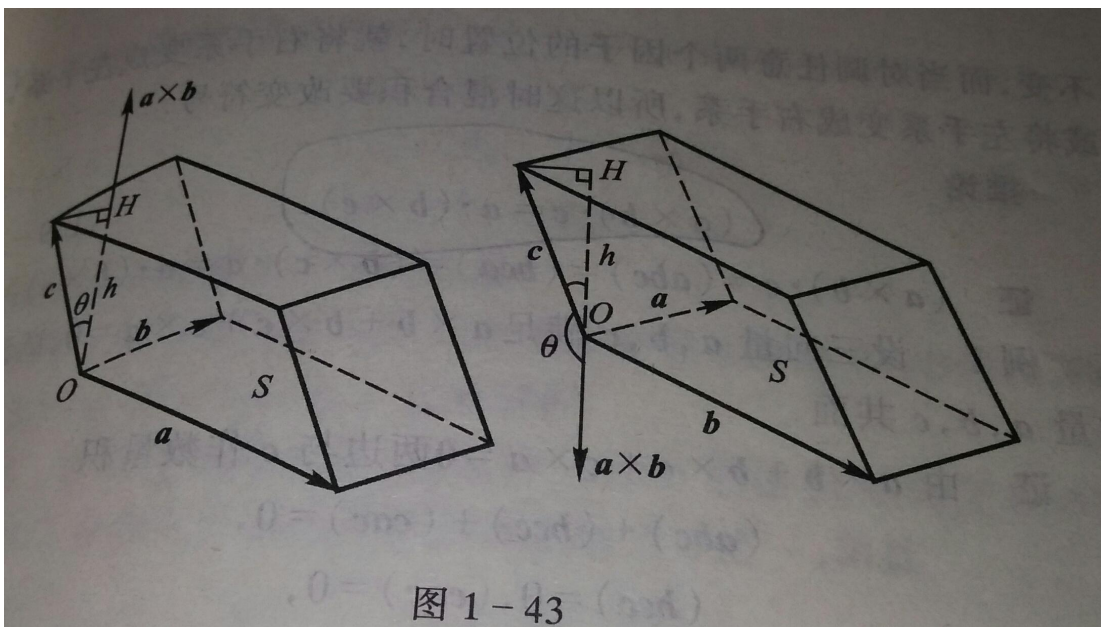


图 1-43

其中 θ 是 $\vec{a} \times \vec{b}$ 和 \vec{c} 的夹角.

当 $\{\rho; \vec{a}; \vec{b}; \vec{c}\}$ 构成右手系时, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $h = |\vec{c}| \cos \theta$, 因而由 $\textcircled{1}$ 得

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = S \cdot h = V.$$

当 $\{\rho; \vec{a}; \vec{b}; \vec{c}\}$ 构成左手系时, $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$, $h = |\vec{c}| \cos(\pi - \theta) = -|\vec{c}| \cos \theta$,

因而由 $\textcircled{1}$ 得

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = -S \cdot h = -V.$$

3. 定理 1.9.2: 三向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 共面的充要条件是 $(\vec{a} \vec{b} \vec{c}) = 0$.

证: 当 \vec{a} 与 \vec{b} 共线, 即 $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ 时, 或 $\vec{c} = \vec{0}$ 时, 显然 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 共面且又有 $(\vec{a} \vec{b} \vec{c}) = 0$.

假设当 \vec{a} 与 \vec{b} 不共线, 且 $\vec{c} \neq \vec{0}$, 我们来证明定理 1.9.2 也成立.

如果 $(\vec{a} \vec{b} \vec{c}) = 0$, 即 $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$, 那么根据定理 1.7.1 有 $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{c}$, 另一面由向量积的定义知 $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{a}$, $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{b}$, 所以 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 三向量共面.

反过来, 如果 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 共面, 那么由 $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{a}$, $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{b}$ (定义 1.8.1) 知 $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{c}$, 于是 $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$ (定理 1.7.1), 即 $(\vec{a} \vec{b} \vec{c}) = 0$.

4. 例题讲解

例 1 设三向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 满足 $\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a} = \vec{0}$, 试证三向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 共面.

证：由 $\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a} = \vec{0}$ 两边与 \vec{c} 作数量积

$$\text{得 } (\vec{abc}) + (\vec{bcc}) + (\vec{cac}) = 0,$$

$$\text{但 } (\vec{bcc}) = 0, \quad (\vec{cac}) = 0,$$

所以 $(\vec{abc}) = 0$ ，因而 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 共面。

例 2 已知四面体 ABCD 的顶点坐标 A(0, 0, 0), B(6, . 6), C(4, 3, 0), D(2, -1, 3), 求他的体积。

解：由初等几何知道，四面体 ABCD 的体积 V 等于以 AB, AC 和 AD 为棱的平行六面体的体积的六分之一，因此

$$V = \frac{1}{6} |(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})|;$$

$$\text{但 } \vec{AB} = \{6, 0, 6\}, \quad \vec{AC} = \{4, 3, 0\}, \quad \vec{AD} = \{2, -1, 3\},$$

$$\text{所以 } (\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}) = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 6 \\ 4 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -6,$$

$$\text{从而 } V = \frac{1}{6} |(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})| = 1 .$$

5. 课堂练习

证明下列各题：

$$(1) (\vec{a}, \vec{b}, \lambda \vec{c}) = \lambda (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c});$$

$$(2) (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}_1 + \vec{c}_2) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}_1) + (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}_2);$$

6. 课堂小结

1. 空间中三向量混合积看做以三向量为棱的六面体的体积；
2. 三向量混合积，可以通过左（右）手系法表示。

7. 布置作业

P58 2、4

8. 板书设计

<p>1. 定义 1.9.1: 给空间的三个向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, 如果先作前两个向量 \vec{a} 与 \vec{b} 的向量积, 再作所得的向量与第三个向量 \vec{c} 的数量积, 最后得到的这个数叫做三向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 的混合积, 记做 $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ 或 $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ 或 $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.</p> <p>2. 定理 1.9.1: 三个不共面向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, 的混合积的绝对值等于以 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 为棱的平行六面体的体积 V, 并且当 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 构成右手系时混合积是正数; 当 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 构成左手系时, 混合积是负数, 也就是有 $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \varepsilon V$, 当 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 是右手系时 $\varepsilon = 1$; 当 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 是左手系时 $\varepsilon = -1$.</p> <p>证: 由于 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 三向量不共面(图如 P55 图 1-43), 把它们归纳到共同的始点 O 可以构成以 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 为棱的平行六面</p>	<p>例 1 设三向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 满足 $\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a} = \vec{0}$, 试证三向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 共面.</p> <p>证: 由 $\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a} = \vec{0}$ 两边与 \vec{c} 作数量积得 $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} + (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{c} + (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{c} = 0$, 但 $(\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{c} = 0$, $(\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{c} = 0$, 所以 $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$, 因而 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 共面.</p> <p>例 2 已知四面体 ABCD 的顶点坐标 $A(0, 0, 0), B(6, 0, 6), C(4, 3, 0), D(2, -1, 3)$, 求他的体积.</p> <p>解: 由初等几何知道, 四面体 ABCD 的体积 V 等于以 AB, AC 和 AD 为棱的平行六面体的体积的六分之一, 因此</p> $V = \frac{1}{6} (\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}) ;$ <p>但 $\vec{AB} = \{6, 0, 6\}, \vec{AC} = \{4, 3, 0\}, \vec{AD} = \{2, -1, 3\}$, 所以</p> $(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}) = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 6 \\ 4 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 6 \cdot 9 - 18 = 36,$ <p>从而</p>	<p>练习 证明下列各题: (3) $(\vec{a}, \vec{b}, \lambda \vec{c}) = \lambda (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$; $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}_1 + \vec{c}_2) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}_1) + (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}_2)$</p>
--	---	---

体，它的底面是以 \vec{a}, \vec{b} 为边的平行四边形，面积为 $S = |\vec{a} \times \vec{b}|$ ，它的高 $|\vec{OH}| = h$ ，它的体积为 $V = S \cdot h$ 。

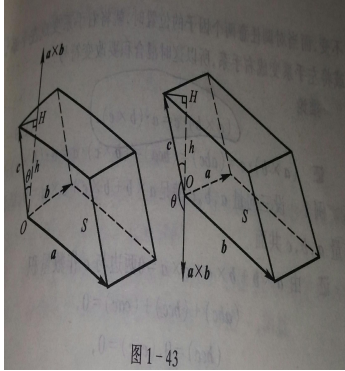


图 1-43

$$V = \frac{1}{6} |(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})| = 1$$

根据数量积定义

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = |\vec{a} \times \vec{b}| |\vec{c}| \cos \theta = S \cdot |\vec{c}| \cos \theta$$

， ①

其中 θ 是 $\vec{a} \times \vec{b}$ 和 \vec{c} 的夹角。

当 $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ 构成右手系时， $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ，

$h = |\vec{c}| \cos \theta$ ， 因而由 ① 得

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = S \cdot h = V$$

当 $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ 构成左手系时， $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$ ，

$$h = |\vec{c}| \cos(\pi - \theta) = -|\vec{c}| \cos \theta$$

，

因而由①得

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \vec{c} = -S \cdot h = -V.$$

3. 定理 1.9.2: 三向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 共面的充要条件是 $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$.

证: 当 \vec{a} 与 \vec{b} 共线, 即 $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ 时, 或 $\vec{c} = \vec{0}$ 时, 显然 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 共面且又有 $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$.

假设当 \vec{a} 与 \vec{b} 不共线, 且 $\vec{c} \neq \vec{0}$, 我们来证明定理 1.9.2 也成立.

如果 $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$, 即 $(\vec{a} \times \vec{b}) \vec{c} = 0$, 那么根据定理 1.7.1 有 $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{c}$, 另一方面由向量积的定义知 $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{a}$, $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{b}$, 所以 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 三向量共面.

反过来, 如果 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 共面, 那么由 $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{a}$, $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{b}$ (定义 1.8.1) 知 $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{c}$, 于是 $(\vec{a} \times \vec{b}) \vec{c} = 0$ (定理 1.7.1), 即 $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$.

课堂小结:

3. 空间中三向量混合积看做以三向量为棱的六面体的体积;

<p>4. 三向量混合积, 可以通过左(右)手系法表示.</p>		
----------------------------------	--	--

五. 教学反思

1. 新课程标准对本节课程的要求是: 在掌握两个向量的数量积和向量积的基本上理解和学习三个向量的混合积的性质定义定理, 并能很好的掌握和运用.

2. 几点体会

(1) 由于本节在理解和运算方面都比前面一节困难, 所以看得出学生对本节的学习相对比较吃力;

(2) 学生们的自我学习能力稍微弱, 遇到难度相对大的题, 就放弃思考;

(3) 还需要进行教学调整, 合理分配各种环节的时间, 因为本章节的内容有点难于理解, 所以因提醒学生学会课前预习.

§ 1.10 三向量的双重向量积

授课学时:1 学时

一、教学目标

1. 理解三个向量双重向量积的定义。
2. 掌握三重向量积的几何意义和基本定理。
3. 能够利用相关计算法则计算三个向量的双重向量积。

二、教学重难点

1. 教学重点: 三个向量双重向量积的计算。
2. 教学难点: 双重向量积的几何意义。

三、教学方法

多媒体辅助教学、讲练和探究式相结合教学法

四、教学过程

1. 导入

(1) 复习导入

$$(1)、\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) \quad \S 1.7$$

$$(2)、\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \angle(\vec{a}, \vec{b}) \quad \S 1.8$$

$$(3)、(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = |\vec{a} \times \vec{b}| |\vec{c}| \cos \theta$$

上几节, 我们学习了两个向量的乘积, 即两向量的数量积; 两个向量的向量积, 它所表示的是以 \vec{a} , \vec{b} 为邻边的平行四边形的面积; 以及三个向量的混合积。接下来我们要来研究三个向量的另外一种乘积, 向量的双重向量积。

一、双重向量积的概念

定义 1

给定空间三向量, 先作其中两个向量的向量积, 再作所得向量与第三个向量的向量积, 那么最后的结果仍然是一个向量, 叫做所给三向量的双重向量积。

例如 $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$

就是三向量 \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} 的一个双重向量积。

二、双重向量积的性质

双重向量积的几何关系

首先我们可以明确的是: $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$, 是和 \vec{a} , \vec{b} 共面且垂直于 \vec{c} 向量, 这是因为根据向量积的定义, 立即知道 $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ 与向量 \vec{c} 垂直, 并且它是与 $\vec{a} \times \vec{b}$ 垂直, 而 \vec{a} , \vec{b} 也与 $\vec{a} \times \vec{b}$ 垂直, 所以 $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ 和 \vec{a} , \vec{b} 共面。

$$\bullet \text{定理 1 } (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c}) \vec{a} \quad (1.10.1)$$

•结论 $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$

在一般情况下, $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ 与 $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ 是两个不同的向量, $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ 因此, 向量积不满足结合律。

•记忆规律

三向量的双重向量积等于中间的向量与其余两向量的数量积的乘积减去括号中另一个向量与其余两向量的数量积的乘积。

•结论 (拉格朗日恒等式 (Joseph-louis Lagrange, 1736-1813, 法国人))
对任意 4 个向量, 有

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a}' \times \vec{b}') = \begin{vmatrix} \vec{a} \cdot \vec{a}' & \vec{a} \cdot \vec{b}' \\ \vec{b} \cdot \vec{a}' & \vec{b} \cdot \vec{b}' \end{vmatrix}$$

拉格朗日恒等式的一个特殊情况 (1.8-7)

$$(\vec{a} \times \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \vec{b}^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$$

•例 1 试证雅可比 (Jacobi) 恒等式

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} + (\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a} + (\vec{c} \times \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{0}$$

•例 2 证明

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{a}' \times \vec{b}') &= (\vec{a} \vec{b} \vec{b}') \vec{a}' - (\vec{a} \vec{b} \vec{a}') \vec{b}' \\ &= (\vec{a} \vec{a}' \vec{b}') \vec{b} - (\vec{b} \vec{a}' \vec{b}') \vec{a} \end{aligned}$$

•作业 P62 1, 5

课堂小结: 三个向量的双重向量积等于中间的向量与其余两向量的数量积的乘积减去括号中另一个向量与其余两向量的数量积的乘积。

板书设计

§ 1.10 向量的双重向量积	例题	练习
<p>• 定义 1 给定空间三向量, 先作其中两个向量的向量积, 再作所得向量与第三个向量的向量积, 那么最后的结果仍然是一个向量, 叫做所给三向量的双重向量积。</p> <p>例如 $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ 就是三向量 \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} 的一个双重向量积。</p> <p>定理 1 $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a}$</p> <p>定理 2 $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a}' \times \vec{b}') = \begin{vmatrix} \vec{a} \cdot \vec{a}' & \vec{a} \cdot \vec{b}' \\ \vec{b} \cdot \vec{a}' & \vec{b} \cdot \vec{b}' \end{vmatrix}$</p> <p>总结: 通过本小节的学习, 我们知道三向量的双重向量积等于中间的向量与其余两向量的数量积的乘积减去括号中另一个向量与其余两向量的数量积的乘积。其不满足结合律。</p>	<p>例 1 试证雅可比 (Jacobi) 恒等式 $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} + (\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a} + (\vec{c} \times \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{0}$</p> <p>例 2 证明 $(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{a}' \times \vec{b}') = (\vec{a}\vec{b}\vec{b}')\vec{a}' - (\vec{a}\vec{b}\vec{a}')\vec{b}'$ $= (\vec{a}\vec{a}'\vec{b}')\vec{b} - (\vec{b}\vec{a}'\vec{b}')\vec{a}$</p>	<p>课本 P62</p> <p>在直角坐标系内我们已经知道 $\vec{a} \{1,0,1\}, \vec{b} \{1,-2,0\}, \vec{c} \{-1,2,1\}$, 求 $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$, $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$</p> <p>3. 证明 $(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{a} \times \vec{d}) = (\vec{a}\vec{b}\vec{d})\vec{a}$.</p>

五、教学反思

1. 在做课件的时候我们应该明确一点, 那就是如何让学生更好的理解知识, 习题就显得很重要了, 所以要多增加习题的量。这一点我有所欠缺。
2. 课堂上我该多引发学生思考, 与学生互动。

3. 学习这一章，向量与坐标，我们首先在空间引进向量以及它的运算，并且通过向量建立坐标系，用代数的方法来研究几何。所以我们要对向量相关的运算牢记于心。
4. 学生表现都很好你，上课没有讲小话的，回答也积极。

