第六节　线性方程组解的结构

主要内容

- 齐次线性方程组解的结构
- 非齐次线性方程组解的结构
- 3元线性方程组的解及其几何意义

一、齐次线性方程组解的结构

设有齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = 0. \end{cases} \quad (1)$$

它的解是一个 n 维向量，称之为**解向量**，

由它的所有解构成的集合，称之为**解集**.

问：

(1)齐次线性方程组$AX=0$解的和，会不会是该方程组的解？

(2)齐次线性方程组$AX=0$解的k倍，是该方程组的解？

文山学院 WENSHAN UNIVERSITY

1. 解的性质

性质 1 齐次线性方程组两个解的和还是方程组的解.

证明 设 $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ 与 $(l_1, l_2, \ldots, l_n)$ 是方程组 (1) 的两个解，则有

$$a_{i1}k_1 + a_{i2}k_2 + \cdots + a_{in}k_n = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, s),$$

$$a_{i1}l_1 + a_{i2}l_2 + \cdots + a_{in}l_n = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, s).$$

把以上两组等式对应相加得

$$a_{i1}(k_1 + l_1) + a_{i2}(k_2 + l_2) + \cdots + a_{in}(k_n + l_n) = 0$$

$i = 1, 2, \cdots, s$. 这说明(1) 的两个解确实是方程组(1)的解.

性质 2 齐次线性方程组一个解的倍数还是方程组的解.

证明 设 $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ 是方程组 (1) 的一个解，

c 为一常数，因为 $a_{i1}(ck_1)+a_{i2}(ck_2)+\cdots+a_{in}(ck_n)$

$$=c(a_{i1}k_1+a_{i2}k_2+\cdots+a_{in}k_n)$$

$$=c\cdot 0=0 \quad (i=1,2,\cdots,s).$$

所以 $(ck_1, ck_2, \ldots, ck_n)$ 是方程组 (1) 的解.

例 1 已知向量 $X_1 = (2,0,-1,0,-3)$，$X_2 = (1,-1,0,0,0)$

（1）判断它们是不是下列方程组的解？

（2）它们的和以及2019 X_1是不是这个方程组的解？

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 \quad + x_5 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 \quad - x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \quad = 0. \end{cases}$$

2. 解的性质的几何意义

3 元齐次线性方程组中的每个方程表示一过原点的平面.

于是方程组的解，也就是这些平面的交，如果不只是原的话，就是一条过原点的直线或一个过原点的平面.

以原点为起点而终点在这样的直线或平面上的向量具有上述性质.

3. 解的结构问题的提出

对于齐次线性方程组，由它的两个性质即得，**解的线性组合还是方程组的解.** 这个性质说明了，如果找到了齐次线性方程组的几个解，那么这些解的所有可能的线性组合就给出了很多的解.

问： 齐次线性方程组的全部解是否能够通过它的有限的几个解的线性组合表示出来?

4. 基础解系的定义

定义 17 齐次线性方程组 (1) 的一组解 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t$ 称为 (1) 的一个基础解系，如果

1) (1) 的任一解都能表成 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t$ 的线性组合；

2) $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t$ 线性无关.

问：1.哪种情况下齐次线性方程组有基础解系？

2.若存在，则如何求齐次线性方程组的基础解系？

例 2 已知向量 $X_1 = (-1,1,0,0,0)$，$X_2 = (2,0,-1,0,-3)$，

$X_2 = (1,0,0,-1,-2)$，

判断它们是不是方程组的一个基础解系？

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 \quad\quad + x_5 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 \quad - x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \quad\quad = 0. \end{cases}$$

提示：原方程同解于 $\begin{cases} x_1 = -x_2 - 2x_3 - x_4, \\ x_5 = +3x_3 + 2x_4. \end{cases}$

文山學院 WENSHAN UNIVERSITY

5. 基础解系的存在性与求法

设有齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

的系数矩阵的秩为r. 方程组（1）表示为AX=0.

1. 当r ＝ n 时，因为齐次线性方程组$AX=0$只有零解，所以此时该方程组没有基础解系.

2. 当 $r < n$ 时

$$A \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & b_{1,r+1} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 1 & b_{r,r+1} & \cdots & b_{rn} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

齐次线性方程组 AX同解于

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & b_{1,r+1} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 1 & b_{r,r+1} & \cdots & b_{rn} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0, \quad \text{即} \begin{cases} x_1 = -b_{1,r+1}x_{r+1} \cdots - b_{1n}x_n \\ x_2 = -b_{2,r+1}x_{r+1} \cdots - b_{2n}x_n \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ x_r = -b_{r,r+1}x_{r+1} \cdots - b_{rn}x_n \end{cases}$$

其中 $x_{r+1}, x_{r+2}, \cdots, x_n$ 是自由未知量，共有 n−r 个.

令$\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \cdots \\ k_{n-r} \end{pmatrix}$得

$$\begin{cases} x_1 = -b_{1,r+1}k_1 \cdots - b_{1n}k_{n-r} \\ x_2 = -b_{2,r+1}k_1 \cdots - b_{2n}k_{n-r} \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ x_r = -b_{r,r+1}k_1 \cdots - b_{rn}k_{n-r} \\ x_{r+1} = \qquad k_1 \\ x_{r+2} = \qquad\qquad k_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ x_n = \qquad\qquad\qquad k_{n-r} \end{cases}$$

方程组$AX=0$的所有解为

$$\begin{pmatrix}0\\1\\ \cdots\\0\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}0\\0\\ \cdots\\1\end{pmatrix}\text{得}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\ \cdots\\x_r\\x_{r+1}\\x_{r+2}\\ \cdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-b_{1r+1}\\-b_{2r+1}\\ \cdots\\-b_{rr+1}\\1\\0\\ \cdots\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-b_{1r+2}\\-b_{2r+2}\\ \cdots\\-b_{rr+2}\\0\\1\\ \cdots\\0\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}-b_{1n-r}\\-b_{2n-r}\\ \cdots\\-b_{rn-r}\\0\\0\\ \cdots\\1\end{pmatrix}.$$

依次记这n-r 个解为

(1) $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-r}$ 是齐次线性方程组的线性无关的解.

(2) 该方程组的所有解 $X = k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_{n-r}\eta_{n-r}$,

齐次线性方程组 $AX = 0$ 的解可由 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-r}$

线性表示.

$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-r}$ 是齐次线性方程组 $AX = 0$ 的基础解系.

定理 8 在齐次线性方程组有非零解的情形下，它有基础解系，并且基础解系所含解的个数等于 $n-r$，这里 r 表示系数矩阵的秩.

任何一个线性无关的与某一个基础解系等价的向量组都是基础解系.

文山學院 WENSHAN UNIVERSITY

例3 求方程组 $\begin{cases} x_1+x_2-x_3-x_4+x_5=0, \\ 2x_1+2x_2+x_3+x_5=0, \\ 3x_1+3x_2-x_4+2x_5=0, \\ x_1+x_2+2x_3+x_4=0. \end{cases}$ 的一个基础解系，并用基础解系表示其所有的解.

解： 对系数矩阵施行如下的初等行变换：

$$\overline{A} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2*1+r_1]{\text{变换第2,5列}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以原方程组同解于 $\begin{cases} x_1+0x_5+x_2+2x_3+x_4=0, \\ 0x_1-x_5+0x_2+3x_3+2x_4=0. \end{cases}$

文山学院 WENSHAN UNIVERSITY

原方程组同解于 $\begin{cases} x_1 = -x_2 - 2x_3 - x_4, \\ x_5 = \qquad 3x_3 + 2x_4. \end{cases}$

令 $\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 得 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$

依次记为这3个解为 η_1, η_2, η_3.它们就是该方程组的一个基础解系,该方程组的所有解表示为:

$$X = k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + k_3\eta_3.$$

例4 求方程组 $\begin{cases} x_1+x_2-x_3-x_4=0 \\ 2x_1-5x_2+3x_3+2x_4=0 \\ 7x_1-7x_2+3x_3+x_4=0 \end{cases}$ 的一个基础解系，并用基础解系表示其所有的解.

解： 对系数矩阵施行如下的初等行变换：

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & 3 & 2 \\ 7 & -7 & 3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -7 & 5 & 4 \\ 0 & -14 & 10 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -7 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & -\frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{7} & -\frac{3}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & -\frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

原方程组同解于 $\begin{cases} x_1 = \dfrac{2}{7}x_3 + \dfrac{3}{7}x_4 \\ x_2 = \dfrac{5}{7}x_3 + \dfrac{4}{7}x_4 \end{cases}$

令 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix}$ 得 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$ 分别记为 η_1, η_2.

所以 η_1, η_2 是原方程组的一个基础解系，

其所有解 $X = k_1\eta_1 + k_2\eta_2$.

二、非齐次线性方程组解的结构

1. 非齐次线性方程组与其导出组

设有非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1\,, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2\,, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s\,. \end{cases} \qquad (9)$$

若令 $b_1 = b_2 = \ldots = b_s = 0$，就得到齐次方程组 (1).

方程组 (1) 称为方程组 (9) 的**导出组**.

2. 非齐次线性方程组的解与其导出组的解之间的关系

问：1) 线性方程组(9)的两个解的和、差是不是该方程组的解？若不是，考虑线性方程组(9)两个解的差会是哪个方程组的解？

设$(k_1, k_2, \ldots, k_n)$与$(l_1, l_2, \ldots, l_n)$是方程组(9)的两个解，则有

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} k_j = b_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, s),$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} l_j = b_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, s),$$

它们的差是 $(k_1-l_1, k_2-l_2, \ldots, k_n-l_n)$. 显然有

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(k_j - l_j) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}k_j - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}l_j$$

$$= b_i - b_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, s).$$

这就是说，$(k_1-l_1, k_2-l_2, \ldots, k_n-l_n)$ 是导出组 (1) 的一个解.

1) 线性方程组 (9) 的两个解的差该线性方程组导出组的一个解.

问：2) 线性方程组 (9) 的一个解与它的导出组 (1) 的一个解之和还是这个线性方程组的一个解吗?

设 $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ 是方程组 (9) 的一个解，即

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} k_j = b_i \quad (i = 1, 2, \cdots, s),$$

又设 $(l_1, l_2, \ldots, l_n)$ 是导出组 (1) 的一个解，即

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} l_j = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, s),$$

于是

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(k_j + l_j) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}k_j + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}l_j$$

$$= b_i + 0 = b_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, s).$$

2) 线性方程组 (9) 的一个解与它的导出组 (1) 的一个解之和还是这个线性方程组的一个解.

3. 非齐次线性方程组解的结构

定理 9 如果 γ_0 是方程组 (9) 的一个特解，那么方程组 (9) 的任一个解 γ 都可以表成

$$\gamma = \gamma_0 + \eta, \tag{10}$$

其中 η 是导出组 (1) 的一个解. 因此，对于方程组 (9) 的任一个特解 γ_0，当 η 取遍它的导出组的全部解时，(10) 就给出 (9) 的全部解.

证明　因为 $\gamma = (\gamma - \gamma_0) + \gamma_0 = \gamma_0 + (\gamma - \gamma_0)$，

$\gamma - \gamma_0$ 是导出组 (1) 的一个解，令

$$\gamma - \gamma_0 = \eta,$$

就得到

$$\gamma = \gamma_0 + \eta \tag{10}$$

既然 (9) 的任一个解都能表成(10) 的形式，

由性质2) 知：当 η 取遍 (1) 的全部解的时候，

$$\gamma = \gamma_0 + \eta$$

就取遍 (9) 的全部解.

证毕

文山学院 WENSHAN UNIVERSITY

问：非齐次线性方程组的任意一个解怎么表示？

设 γ_0 是非齐次线性方程组的一个特解，η_1，$\eta_2,\ldots,\eta_{n-r}$ 是它的导出组的一个基础解系，则它的任一个解 η 可表示为

$$\eta=\gamma_0+k_1\eta_1+k_2\eta_2+\ldots+k_{n-r}\eta_{n-r}$$

称之为非齐次线性方程组的**一般解**.

由定理 9 容易得出以下推论：

推论 在非齐次线性方程组有解的条件下，解是唯一的充分必要条件是它的导出组只有零解.

证明 **充分性** 如果方程组(9)有两个不同的解，那么它的差就是导出组的一个非零解. 因此，如果导出组只有零解，那么方程组有唯一解.

必要性 如果导出组有非零解，那么这个解与方程组(9)的一个解(因为它有解)的和就是(9)的另一个解，也就是说，(9)不止一个解. 因之，如果方程(9)有唯一解，那么它的导出组只有零解.

证毕

例 5 求下列线性方程的解

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3-x_4+x_5=0, \\ 2x_1+2x_2+x_3+x_5=1, \\ 3x_1+3x_2-x_4+2x_5=1, \\ x_1+x_2+2x_3+x_4=1. \end{cases}$$

解 把方程组的增广矩阵化为行阶梯形

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

文山学院 WENSHAN UNIVERSITY

交换第2,5列
r_2*1+r_1

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以原方程组同解于
$$\begin{cases} x_1 + 0x_5 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 1, \\ 0x_1 + x_5 + 0x_2 - 3x_3 - 2x_4 = -1. \end{cases}$$

取x_2, x_3, x_4当作自由未知量，把方程组变形成

$$\begin{cases} x_1 = 1 - x_2 - 2x_3 - x_4, \\ x_5 = -1 + 3x_3 + 2x_4. \end{cases}$$

令$x_2 = x_3 = x_4 = 0$得方程组的一个特解$\gamma_0 = (1,0,0,0,-1)$

下面求导出组的基础解系

导出组同解于 $\begin{cases} x_1 = -x_2 - 2x_3 - x_4, \\ x_5 = \quad\quad +3x_3 + 2x_4. \end{cases}$

取 $x_2 = 1, x_3 = x_4 = 0$ 得 $\eta_1 = (-1, 1, 0, 0, 0)$

取 $x_2 = x_4 = 0, x_3 = 1$ 得 $\eta_2 = (-2, 0, 1, 0, 3)$

取 $x_2 = x_3 = 0, x_4 = 1$ 得 $\eta_3 = (-1, 0, 0, 1, 2)$

于是原方程组的通解为 $\gamma = \gamma_0 + k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + k_3\eta_3$,

其中 k_1, k_2, k_3 是任意的常数.

文山学院 WENSHAN UNIVERSITY

三、3元线性方程组的解及其几何意义

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \end{cases}$$

设有两个平面 π_1, π_2，其方程如下：

$$\pi_1: \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1,$$

$$\pi_2: \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$

则平面 π_1, π_2 间的位置关系可由线性方程组（11）的解表示.

为方便起见，用 A 表示所讨论的方程组的系数矩阵，B 表示所讨论的方程组的增广矩阵，$R(A)$ 表示矩阵 A 的秩.

1) 相交的条件是：$R(A) = R(B) = 2.$

这时方程组有无穷多组解，其一般解中含有一个任意常数，即两平面相交为一直线.

2) 重合的条件是：$R(A) = R(B) = 1.$

这时增广矩阵的两个行向量成比例，故两个平面是重合的.

3) 平行的条件是：$R(A) = 1$，$R(B) = 2$.

这时方程组无解，即两个平面平行，且不重合.

文山学院
WENSHAN UNIVERSITY

小结和作业

1. 请叙述齐次线性方程组解的性质.

2. 什么情况下，齐次线性方程组有基础解系？如何求齐次线性方程组的基础解系？

3. 请叙述非齐次线性方程组解的性质.

4.什么情况下，线性方程组有无穷多个解，这些解如何用导出组的基础解系和特解表示？

3.作业见学习通.