第八节　线性空间的同构

主要内容

- 引入
- 定义
- 同构映射的性质
- 同构的充分必要条件
- 举例

一、引入

设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 是线性空间 V 的一组基，在这组基下，V 中每个向量都有确定的坐标，而向量的坐标可以看成 P^n 的元素。因此，向量与它的坐标之间的对应实质上就是 V 到 P^n 的一个映射。显然，这个映射是单射与满射，换句话说，坐标给出了线性空间 V 与 P^n 的一个双射。

设 $\alpha = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \ldots + a_n\varepsilon_n$,

$$\beta = b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2 + \ldots + b_n\varepsilon_n .$$

即向量 α, β 的坐标分别是 $(a_1, a_2, \ldots, a_n), (b_1, b_2, \ldots, b_n)$,

那么 $\alpha + \beta = (a_1 + b_1)\varepsilon_1 + (a_2 + b_2)\varepsilon_2 + \ldots + (a_n + b_n)\varepsilon_n$,

$$k\alpha = ka_1\varepsilon_1 + ka_2\varepsilon_2 + \ldots + ka_n\varepsilon_n .$$

于是向量 $\alpha + \beta, k\alpha$ 的坐标分别是

$$(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$$

$$= (a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, b_2, \ldots, b_n),$$

$$(ka_1, ka_2, \ldots, ka_n) = k(a_1, a_2, \ldots, a_n) .$$

以上的式子说明?

以上的式子说明在向量用坐标表示之后，它们的运算就可以归结为它们坐标的运算.

因而线性空间 V 的讨论也就可以归结为 P^n 的讨论.

二、定义

定义 11 数域 P 上两个线性空间 V 与 V' 称为**同构的**，如果由 V 到 V' 有一个双射 σ, 具有以下性质：

1) $\sigma(\alpha+\beta)=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta)$；

2) $\sigma(k\alpha)=k\sigma(\alpha)$，

其中 α,β 是 V 中任意向量，k 是 P 中任意数.

这样的映射 σ 称为**同构映射**.

前面的讨论说明在 n 维线性空间 V 中取定一组基后，向量与其坐标之间的对应就是 V 到 P^n 的一个同构映射. 因而，**数域 P 上任一个 n 维线性空间都与 P^n 同构.**

三、同构映射的性质

同构映射具有下列基本性质：

1. $\sigma(0)=0$，$\sigma(-\alpha)=-\sigma(\alpha)$.

2. $\sigma(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+k_r\alpha_r)$
$=k_1\sigma(\alpha_1)+k_2\sigma(\alpha_2)+\ldots+k_r\sigma(\alpha_r)$.

3. V 中向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$ 线性相关的充要条件是它们的像 $\sigma(\alpha_1),\sigma(\alpha_2),\ldots,\sigma(\alpha_r)$ 线性相关.

因为维数就是空间中线性无关向量的最大个数,所以由同构映射的性质可知，同构的线性空间有相同的维数.

文山學院 WENSHAN UNIVERSITY

4. 如果 V_1 是 V 的一个线性子空间，那么，V_1 在 σ 下的像集合 $\sigma(V_1)=\{\sigma(\alpha)\mid\alpha\in V_1\}$ 是 $\sigma(V)$ 的子空间，并且 V_1 与 $\sigma(V_1)$ 维数相同.

5. 同构映射的逆映射以及两个同构映射的乘积还是同构映射.

下证同构映射的逆映射也是同构映射.

证明　设 σ 是线性空间 V 到 V' 的同构映射，

显然逆映射 σ^{-1} 是 V' 到 V 的一个双射.

下证 σ^{-1} 也是同构映射，只需证 σ^{-1} 满足：定义11中的条件 1), 2).

令 α'，β' 是 V' 中任意两个向量，于是

$$\sigma\sigma^{-1}(\alpha'+\beta') = \alpha'+\beta'$$

$$= \sigma\sigma^{-1}(\alpha') + \sigma\sigma^{-1}(\beta')$$

$$= \sigma(\sigma^{-1}(\alpha') + \sigma^{-1}(\beta')).$$ 即

文山学院 WENSHAN UNIVERSITY

$$\sigma\sigma^{-1}(\alpha' + \beta') = \sigma(\sigma^{-1}(\alpha') + \sigma^{-1}(\beta')).$$

两边用 σ^{-1} 作用，即得

$$\sigma^{-1}(\alpha' + \beta') = \sigma^{-1}(\alpha') + \sigma^{-1}(\beta').$$

下证两个同构映射的乘积仍然是同构映射.

现设 σ 和 τ 分别是线性空间 V 到 V'， V' 到 V'' 的同构映射，下证乘积 $\tau\sigma$ 是 V 到 V'' 的一个同构映射.

由 σ 和 τ 是同构映射得： $\tau\sigma$ 是双射.

α, β 是 V 中任意向量，k 是 P 中任意数有

$$\tau\sigma(\alpha + \beta) = \tau(\sigma(\alpha) + \sigma(\beta)) = \tau\sigma(\alpha) + \tau\sigma(\beta),$$

$$\tau\sigma(k\alpha) = k\tau\sigma(\alpha)$$

因此 $\tau\sigma$ 是同构映射.

因为任一线性空间 V 到自身的恒等映射是一同构映射，所以性质 5 表明，同构作为线性空间之间的一种关系，具有反身性、对称性与传递性.

既然数域 P 上任意一个 n 维线性空间都与 P^n 同构，由同构的对称性与传递性即得：

数域 P 上任意两个 n 维线性空间都同构.

综上所述，我们有：

四、同构的充分必要条件

定理 12 数域 P 上两个有限维线性空间同构的充要条件是它们有相同的维数.

在线性空间的抽象讨论中，并没有考虑线性空间的元素是什么，也没有考虑其中运算是怎样定义的，而只涉及线性空间在所定义的运算下的代数性质. 从这个观点看来，同构的线性空间是可以不加区别的. 因之，定理 12 说明了，维数是有限维线性空间的唯一本质特征.

特别地，每一数域 P 上 n 维线性空间都与 n 元数组所成的空间 P^n 同构，而同构的空间有相同的性质.

由此可知，我们以前所得到的关于 n 元数组的一些结论，在一般的线性空间中也是成立的，而不必要一一重新证明.

五、举例

例 1 $P[x]_3$ 与 P^3 同构

对于任意的多项式 $f(x)$有： $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

$\sigma(f(x)) = (a_0, a_1, a_2)$， 显然，$\sigma$是同构映射.

σ 把$P[x]_3$的基 $1, x, x^2$ 映射成 P^3 哪些向量?

因为
$$\sigma(1) = e_1 = (1, 0, 0),$$
$$\sigma(x) = e_2 = (0, 1, 0),$$
$$\sigma(x^2) = e_3 = (0, 0, 1).$$

σ 把$P[x]_3$的基 $1, x, x^2$ 映射成 P^3 的基 e_1, e_2, e_3，

例 2　设 V 是全体复数在实数域 R 上构成的线性空间，

问：1）V 的维数.

2）找一个线性空间使它与 V 同构，并指出其同构映射

V 与 $\mathbb{R}^2$ 同构．其同构映射为

$$\sigma(a+\mathrm{i}b)=(a,b).$$

σ 把 V 的基 $1,\mathrm{i}$ 映射成 $\mathbb{R}^2$ 的基 e_1, e_2，即

$$\sigma(1)=e_1=(1,0),$$

$$\sigma(\mathrm{i})=e_2=(0,1).$$

例 3 数域 P 上的空间 $P^{2\times 2}$ 与 P^4 同构. 其同构映射为

$$\sigma\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)=(a,b,c,d).$$

设 P^4 的一组基为 $e_1=(1,0,0,0)$, $e_2=(0,1,0,0)$, $e_3=(0,0,1,0)$, $e_4=(0,0,0,1)$, 则可得 $P^{2\times 2}$ 的一组基为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

小结和作业

1.请叙述同构映射及两个线性空间的定义?

2.请叙述同构映射的性质.

3.两个有限维的线性空间同构的充要条件?