文山學院
WENSHAN UNIVERSITY

第五节　因式分解定理

主要内容

- 引入
- 不可约多项式
- 因式分解及唯一性定理

一、引入

中学数学中因式分解要求分解到不能再分为止，“不能再分”是如何界定？

例 多项式x^4-4在Q上分解为$\left(x^2-2\right)\left(x^2+2\right)$不能再分解了.

而在实数集上可以分解为$\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x^2+2\right)$.

在复数集上可以分解为$\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}i\right)\left(x+\sqrt{2}i\right)$.

二、不可约多项式

在下面的讨论中，仍然选定一个数域 P 作为系数域，考虑数域 P 上的多项式环 $P[x]$ 中多项式的因式分解.

1. 定义

定义 8 数域 P 上次数 ≥ 1 的多项式 $p(x)$ 称为域 P 上的**不可约多项式**，如果它不能表成数域 P上两个次数比 $p(x)$ 的次数低的多项式的乘积.

问题

1.任意一次多项式总是不可约多项式？

2.x^2+2是不是R和C上的不可约多项式？

3.不可约多项式 $p(x)$ 的因式有哪些？

任意一次多项式是不可约多项式。

一个多项式是否不可约是依赖于系数域的.

不可约多项式 $p(x)$ 的因式只有非零常数与它自身的非零常数倍 $cp(x)$ $(c \neq 0)$ 这两种外就没有了.

反过来，具有该性质的次数 ≥ 1 的多项式一定是不可约的.

不可约多项式$p(x)$与任一多项式$f(x)$之间只可能有两种关系，或者$p(x)\mid f(x)$或者$(p(x),f(x))=1$.

如果$(p(x),f(x))=d(x)$，那么$d(x)$或者是1或者是$cp(x)\ (c\neq 0)$. 当$d(x)=cp(x)$时，就有$p(x)\mid f(x)$.

2. 性质

定理 5 如果$p(x)$是不可约多项式，那么对于任意的两个多项式$f(x),g(x)$，由$p(x)\mid f(x)g(x)$一定推出$p(x)\mid f(x)$或者$p(x)\mid g(x)$.

这个定理可以推广为：

如果不可约多项式 $p(x)$ 整除一些多项式 $f_1(x)$, $f_2(x)$, … , $f_s(x)$ 的乘积 $f_1(x)\,f_2(x)\,\ldots\,f_s(x)$，那么 $p(x)$ 一定整除这些多项式之中的一个.

三、因式分解及唯一性定理

因式分解的唯一性定理 数域 P 上每一个次数 ≥ 1 的的多项式 $f(x)$ 都可以唯一地分解成数域 P上一些不可约多项式的乘积. 所谓唯一性是说 ,若有两个分解式

$$f(x) = p_1(x)\, p_2(x) \ldots p_s(x) = q_1(x)\, q_2(x) \ldots q_t(x) \,,$$

那么必有 $s = t$, 并且适当排列因式的次序后有

$$p_i(x) = c_i\, q_i(x) \,,\ \ i = 1 \,, 2 \,, \ldots \,, s \,,$$

其中c_i $(i = 1 \,, 2 \,, \ldots \,, s\,)$ 是一些非零常数.

证明 先证分解式的存在性. 对 $f(x)$ 的次数作归纳法.

因为一次多项式都是不可约的，所以 $n = 1$ 时结论成立.

设 $\partial(f(x)) = n$, 假设对于次数低于 n 的多项式已经成立.

如果 $f(x)$ 是不可约多项式，结论是显然的，不妨设

$f(x)$ 不是不可约的，即有

$$f(x) = f_1(x)\, f_2(x) \text{ ,}$$

其中 $f_1(x)$， $f_2(x)$ 的次数都低于 n . 由归纳法假设

$f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 都可以分解成数域 P 上一些不可约多项式的乘积.

把 $f_1(x)$， $f_2(x)$ 的分解式合起来就得到 $f(x)$ 的一个分解式.

由归纳法原理，结论普遍成立.

再证唯一性. 设 $f(x)$ 可以分解成不可约多项式的乘积

$$f(x) = p_1(x)\, p_2(x) \ldots p_s(x) .$$

如果 $f(x)$ 还有另一个分解式

$$f(x) = q_1(x)\, q_2(x) \ldots q_t(x) ,$$

其中 $q_i(x)$ $(i = 1 , 2 , \ldots , t)$ 都是不可约多项式, 于是

$$f(x) = p_1(x)\, p_2(x) \ldots p_s(x) = q_1(x)\, q_2(x) \ldots q_t(x) . \quad (1)$$

对 s 作归纳法．当 $s=1$， $f(x)$ 是不可约多项式，由定义必有

$$s=t=1,$$

且

$$f(x)=p_1(x)=q_1(x).$$

现在设不可约因式的个数为 $s-1$ 时唯一性已证．

由 $f(x)=p_1(x)\,p_2(x)\,\ldots\,p_s(x)=q_1(x)\,q_2(x)\,\ldots\,q_t(x)$ 得

$$p_1(x)\mid q_1(x)\,q_2(x)\,\ldots\,q_t(x),$$

因此， $p_1(x)$ 必能除尽其中的一个，无妨设 $p_1(x)\mid q_1(x)$.

因为 $q_1(x)$ 也是不可约多项式，所以有

$$p_1(x) = c_1q_1(x)\,, \tag{2}$$

由 $p_1(x)\,p_2(x)\,\ldots\,p_s(x) = q_1(x)\,q_2(x)\,\ldots\,q_t(x)$ 得

$$p_2(x)\,\ldots\,p_s(x) = c_1^{-1}q_2(x)\,\ldots\,q_t(x)\,.$$

由归纳法假定，有 $s - 1 = t - 1$, 即 $s = t$, (3)

并且适当排列次序之后有

$$p_2(x) = c_2'c_1^{-1}q_2(x)\,，\text{即 } p_2(x) = c_2q_2(x)\,,$$

$$p_i(x) = c_i\,q_i(x)\ \ (\,i = 3, \ldots , s\,)\,. \tag{4}$$

(2) , (3) , (4) 合起来就是所要证的结论.　　**证毕**

文山学院 WENSHAN UNIVERSITY

标准分解式

在多项式 $f(x)$ 的分解中，可以把每一个不可约因式的首项系数提出来，使它们成为首项系数为 1 的多项式，再把相同的不可约因式合并．于是 $f(x)$ 的分解式为

$$f(x)=cp_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_s^{r_s}(x),$$

其中 c 是 $f(x)$ 的首项系数，$p_1(x)$, $p_2(x)$, … , $p_s(x)$ 是不同的首项系数为 1 的不可约多项式，而 r_1 , r_2 , … , r_s 是正整数．这种分解式称为**标准分解式**.

求最大公因式和最小公倍式

如果 $f(x)$、$g(x)$ 的标准分解式为

$$f(x)=c_1 p_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_s^{r_s}(x)h_1^{m_1}(x)h_2^{m_2}(x)\cdots h_i^{m_i}(x)$$

$$g(x)=c_2 p_1^{l_1}(x)p_2^{l_2}(x)\cdots p_s^{l_s}(x)q_1^{k_1}(x)q_1^{k_1}(x)\cdots q_t^{k_t}(x)$$

那么 $f(x)$、$g(x)$ 的最大公因式？最小公倍式？

$$\left(f(x),g(x)\right)=p_1^{\lambda_1}(x)p_2^{\lambda_2}(x)\cdots p_s^{\lambda_s}(x)$$

其中 $\lambda_i=\min\left(r_i,l_i\right)$

$$\left[f(x),g(x)\right]=$$

$$p_1^{\nu_1}(x)p_2^{\nu_2}(x)\cdots p_s^{\nu_s}(x)h_1^{m_1}(x)h_2^{m_2}(x)\cdots h_i^{m_i}(x)q_1^{k_1}(x)\cdots q_t^{k_t}(x)$$

带余除法是一元多项式因式分解理论的基础.

整数也有带余除法，即

对于任意整数 a , b, $b \neq 0$, 都存在唯一的整数

q , r , 使

$$a = qb + r,$$

其中 $0 \leq r < |b|$.

小结和作业

1.请叙述不可约多项式的定义?

2.不可约多项式有哪些性质?

3.请叙述**因式分解的唯一性定理及其作用**?

4.作业见学习通.