第六节　重　因　式

主要内容

- 定义
- 重因式的判别法

文山学院 WENSHAN UNIVERSITY

一、定义

标准分解式

$$f(x)=cp_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_s^{r_s}(x)$$

互异 — 首一 — 不可约因式 — 方幂 — 乘积

定义 9 不可约多项式 $p(x)$ 称为多项式 $f(x)$ 的 k 重因式，如果 $p^k(x)\mid f(x)$，$p^{k+1}(x)\nmid f(x)$.

$k=0$，$p(x)$ 根本不是 $f(x)$ 的因式；

$k=1$，$p(x)$ 称为 $f(x)$ 的**单因式**；

$k>1$，$p(x)$ 称为 $f(x)$ 的**重因式**.

$f(x)$ 的标准分解式如上，则它有哪些因式，分别是几重？

1. k重因式和重因式有什么区别?
2. $(x-1)^2$是否是$(x-1)^4(x+1)$的重因式?
3. x^2+1是否是$(x^4-1)^3$的重因式?

✓ 重因式一定是不可约因式，所以和所在数域有关；

✓ 不可约多项式$p(x)$是$f(x)$的重因式的充分必要条件是$f(x)=p^k(x)h(x)$，且$p(x)\nmid h(x)$（或$(p(x),h(x))=1$）.

文山學院 WENSHAN UNIVERSITY

二、重因式的判别法

1. 多项式的微商

设有多项式 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$.

定义它的**微商**是 $f'(x) = a_n n x^{n-1} + a_{n-1}(n-1)x^{n-2} + \dots + a_1$.

关于多项式**微商**的基本公式

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x),$$

$$(c f(x))' = c f'(x),$$

$$(f(x) g(x))' = f'(x) g(x) + f(x) g'(x),$$

$$(f^m(x))' = m(f^{m-1}(x) f'(x)).$$

同样可定义**高阶微商**的概念.

微商 $f'(x)$ 称为$f(x)$ 的**一阶微商**；

$f'(x)$ 的微商 $f''(x)$ 称为 $f(x)$ 的**二阶微商**；等等.

$f(x)$ 的 k 阶微商记为 $f^{(k)}(x)$.

文山学院

对于多项式$f(x)=(x+1)^3$，$x+1$是它的几重因式？

而 $f'(x)=3(x+1)^2$，$x+1$是它的几重因式？

$f''(x)=6(x+1)$，$x+1$是它的几重因式？

是不是f（x）的3阶微商的因式？

以上情况是不是对于一般情况也成立？

2. 重因式的判定定理

定理 6 如果不可约多项式 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的k重因式$(k\geq 1)$，那么它是微商 $f'(x)$ 的 $k-1$ 重因式.

推论 如果不可约多项式$p(x)$是$f(x)$的k重因式$(k \geq 1)$，那么

- ✓ 它是$f'(x)$的$k-1$重因式;
- ✓ 它是$f''(x)$的$k-2$重因式;
- ✓ ……………………………
- ✓ 它是$f^{(k-1)}(x)$的1重因式;

因式

- ✓ 它不是$f^{(k)}(x)$的因式.

推论 不可约多项式$p(x)$是$f(x)$的重因式的充分必要条件为$p(x)$是$f(x)$与$f'(x)$的公因式.

推论 多项式$f(x)$没有重因式的充分必要条件为$f(x)$与$f'(x)$互素.

例 证明$f(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$没有重因式.

$$f'(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$\Rightarrow\quad f(x)=f'(x)+\frac{x^n}{n!}$$

$$(f(x),\ f'(x))=(f'(x),\ \frac{x^n}{n!})$$

$\frac{x^n}{n!}$的不可约因式只有x，而$x\nmid f'(x)$,

故$\left(\frac{x^n}{n!},f'(x)\right)=1$，从而$\left(f(x),f'(x)\right)=1$,

文山学院
WENSHAN UNIVERSITY

设 $f(x)$ 具有标准分解式

$$f(x)=cp_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_s^{r_s}(x).$$

根据定理6 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 的最大公因式必须具

有标准分解式 $p_1^{r_1-1}(x)p_2^{r_2-1}(x)\cdots p_s^{r_s-1}(x)$.

于是 $$\frac{f(x)}{(f(x),f'(x))}=cp_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x).$$

这是一个没有重因式的多项式，但是它与 $f(x)$ 具有完全相同的不可约因式.

因此，这是一个去掉因式重数的有效办法.

小结和作业

1.请叙述重因式的定义？

2.请叙述判断重因式的定理以及3个推论？

3.请找一个方法去掉重因式的重数的方法?

4.作业见学习通.