

## 一、定义

从前面第五节的讨论可以知道，并不是对于每一个线性变换都有一组基，使它在这组基下的矩阵成为对角形。下面先介绍一下，在适当选择的基下，一般的一个线性变换能化简成什么形状。

在这一节，我们的讨论限制在复数域中。

## 一、定义

**定义 13** 形式为  $J(\lambda, t) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}_{t \times t}$

的矩阵称为**若尔当(Jordan)块**，其中 $\lambda$ 是复数。

由若干个若尔当块组成的准对角矩阵称为**若尔当**

**形矩阵**，其一般形状如

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix} \quad (1)$$

其中  $A_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & & & \\ 1 & \lambda_i & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda_i \\ & & & 1 & \lambda_i \end{pmatrix}_{k_i \times k_i}$

并且  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$  中有一些可以相等.

例如

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix}$$

都是若尔当块，而

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

是一个若尔当形矩阵。

一级若尔当块就是一级矩阵，因此若尔当形矩阵中包括对角矩阵。

因为若尔当形矩阵是下三角形矩阵，所以不难算出，在一个线性变换的若尔当标准形中，主对角线上的元素正是特征多项式的全部根(重根按重数计算)。

这一节将利用线性变换按它的不变子空间的直和分解的性质来证明下列重要结论。

## 二、主要结论

**定理 16** 设  $A$  是复数域上线性空间  $V$  的一个线性变换, 则在  $V$  中必定存在一组基, 使  $A$  在这组基下的矩阵是若尔当形矩阵.

**证明** 设  $A$  的特征多项式为

$$f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1} (\lambda - \lambda_2)^{r_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{r_s},$$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$  是  $f(\lambda)$  的全部不同的根. 由 **定理 15** 

知  $V$  可分解成  $A$  的不变子空间的直和

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_s,$$

其中  $V_i = \{\xi \mid (A - \lambda_i E)^{r_i} \xi = 0, \xi \in V\}$ . 我们如  
能证明在每个  $V_i$  上有一组基使  $A|_{V_i}$  在该基下矩  
阵为若尔当形矩阵, 则定理得证.

为此需证明:

**引理**  $n$  维线性空间  $V$  上线性变换  $B$  满足  
 $B^k = 0$ ,  $k$  是某正整数, 就称  $B$  为  $V$  上幂零线性  
变换. 对幂零线性变换  $B$ ,  $V$  中必有下列形式的  
一组元素作为基

$$\begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_s \\ B \alpha_1 & B \alpha_2 & \cdots & B \alpha_s \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{array} \quad (2)$$

$$B^{k_1-1} \alpha_1, \quad B^{k_2-1} \alpha_2, \quad \cdots \quad B^{k_s-1} \alpha_s.$$

$$(B^{k_1} \alpha_1 = 0) \quad (B^{k_2} \alpha_2 = 0) \quad \cdots \quad (B^{k_s} \alpha_s = 0)$$

于是  $B$  在这组基下的矩阵为



$$\left( \begin{array}{cccc} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \\ & & \underbrace{\hspace{2cm}}_{k_1} & \\ & 0 & & \\ & 1 & 0 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 1 & 0 \\ & & & \underbrace{\hspace{2cm}}_{k_2} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & 0 \\ & & & & 1 & 0 \\ & & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & & & 1 & 0 \\ & & & & & & \underbrace{\hspace{2cm}}_{k_s} & \end{array} \right)$$

(3)

对  $V$  的维数  $n$  作归纳法.

$n=1$ , 这时  $V$  有基  $\alpha_1$ , 且  $B\alpha_1 = \lambda_1\alpha_1$ .

$$\text{由 } B^k\alpha_1 = \lambda_1^k\alpha_1 = 0,$$

得  $\lambda_1 = 0$ . 于是  $\alpha_1$  ( $B\alpha_1 = 0$ ), 是要求的基.

设线性空间维数  $< n$  时, 引理的结论成立. 对

满足引理条件的  $n$  维线性空间  $V$ , 考察  $B$  的不变

子空间  $BV$ . 若  $BV$  的维数等于  $V$  的维数, 则

$BV = V$ . 于是

$$B^kV = B^{k-1}(BV) = B^{k-1}V = B^{k-2}V = \dots = V.$$

但  $B^k V = 0$ , 得  $V = 0$ , 矛盾. 故  $B V$  的维数小于  $n$ . 将  $B$  看成  $B V$  上的线性变换, 仍有  $B^k = 0$ .

由归纳法假设,  $B V$  上有基

$$\begin{array}{cccc} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \cdots & \varepsilon_t \\ B \varepsilon_1 & B \varepsilon_2 & \cdots & B \varepsilon_t \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{array} \quad (4)$$

$$B^{k_1-1} \varepsilon_1, \quad B^{k_2-1} \varepsilon_2, \quad \cdots \quad B^{k_t-1} \varepsilon_t,$$

$$(B^{k_1} \varepsilon_1 = 0) \quad (B^{k_2} \varepsilon_2 = 0) \quad \cdots \quad (B^{k_t} \varepsilon_t = 0)$$

其中  $k_1, k_2, \dots, k_t$  皆为正整数.

由于  $\varepsilon_1, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_t$  皆属于  $BV$ , 有  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t \in V$

使  $B\alpha_1 = \varepsilon_1, \dots, B\alpha_t = \varepsilon_t.$

排出下列向量集合:

$$\begin{array}{cccc}
 \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_t \\
 B\alpha_1 & B\alpha_2 & \cdots & B\alpha_t \\
 \vdots & \vdots & & \vdots \\
 B^{k_1-1}\alpha_1, & B^{k_2-1}\alpha_2, & \cdots & B^{k_t-1}\alpha_t. \\
 B^{k_1}\alpha_1 & B^{k_2}\alpha_2 & \cdots & B^{k_t}\alpha_t, & \alpha_{t+1}, \cdots, \alpha_s,
 \end{array} \tag{5}$$



$$\begin{pmatrix} B^{k_1+1} \alpha_1, \\ = B^{k_1} \varepsilon_1 \\ = 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B^{k_2+1} \alpha_2, \\ = B^{k_2} \varepsilon_2 \\ = 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} B^{k_t+1} \alpha_t, \\ = B^{k_t} \varepsilon_t \\ = 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B \alpha_{t+1} \\ = 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} B \alpha_s \\ = 0 \end{pmatrix}$$

其中实线方框中的向量组正是 (4) 中的向量组，虚线方框中的向量组正是实线方框中各向量在  $B$  下的原像所成的向量组。最后一行中的


$$B^{k_1} \alpha_1, \dots, B^{k_t} \alpha_t$$

是  $B$  的核  $B^{-1}(0)$  中的向量，它们是  $BV$  的基中的部分向量，故是线性无关的。

$\alpha_{t+1}, \dots, \alpha_s$  是  $B^{-1}(0)$  中的向量，它们与

$$B^{k_1} \alpha_1, \dots, B^{k_t} \alpha_t$$

合起来正是  $B^{-1}(0)$  的一组基，并组成上述向量组

(5) 的最后一行。由**定理 12**  知虚线方框中的向量与最后一行的向量合起来就是  $V$  的一组基，且符合引理的要求（这时  $k_{t+1} = \dots = k_s = 1$ ）。完成了归纳法。

引理证毕

现在回来证明定理 16. 在  $V_i$  上有

$$(A - \lambda_i E)^{r_i} = 0.$$

作

$$B = (A - \lambda_i E) | V_i,$$

则

$$B^{r_i} = 0.$$

由引理, 有  $V_i$  的基使  $B$  的矩阵为形状如 (3) 的若尔当形. 于是  $A | V_i = B + \lambda_i E$  在该基下的矩阵为 (3) 中矩阵与  $\lambda_i E$  的和, 即为



也是若尔当形. 把每个  $V_i$  的上述基合起来是  $V$  的基,  $A$  在该基下的矩阵仍为若尔当形矩阵.

证毕

上述结果用矩阵表示就是:

**定理 17** 每个  $n$  级复矩阵  $A$  都与一个若尔当形矩阵相似.

定理 17 是借助于线性变换的不变子空间的直和分解及取适当基向量来达到证明的. 这是用线性

变换的工具来解决矩阵问题的范例。但这方法用于计算一般矩阵的若尔当形却不方便。甚至也难以判断两个  $n \times n$  矩阵何时是相似的。这些问题将留待下一章中用  $\lambda$ -矩阵的工具来解决。在那儿同样可以得到定理 16 及定理 17，并且能得到若尔当标准形的唯一性的结论。