第六节　线性变换的值域与核

主要内容

- 定义
- 值域与核的性质
- $\mathscr{A}$的值域的结构
- $\mathscr{A}$的秩、零度与空间维数的关系
- 举例

一、定义

定义 6 设 $\mathscr{A}$ 是线性空间 V 的一个线性变换，$\mathscr{A}$ 的全体像组成的集合称为 $\mathscr{A}$ 的**值域**，用 $\mathscr{A}V$ 表示. 所有被 $\mathscr{A}$ 变成零向量的向量组成的集合称为的**核**，用 $\mathscr{A}^{-1}(0)$ 表示.

若用集合的记号则

$$\mathscr{A}V=\{\mathscr{A}\xi \mid \xi\in V\},$$

$$\mathscr{A}^{-1}(0)=\{\xi \mid \mathscr{A}\xi=0,\ \xi\in V\}.$$

二、值域与核的性质

性质 线性变换的值域与核都是 V 的子空间.

证明 由

$$\mathscr{A}\alpha+\mathscr{A}\beta=\mathscr{A}(\alpha+\beta),$$

$$k\mathscr{A}\alpha=\mathscr{A}(k\alpha)$$

可知，$\mathscr{A}V$ 对加法与数量乘法是封闭的， 同时，$\mathscr{A}V$ 是非空的， 因此 $\mathscr{A}V$ 是 V 的子空间.

由 $\mathscr{A}\alpha=0$ 与 $\mathscr{A}\beta=0$ 可知

$$\mathscr{A}(\alpha+\beta)=0,\quad \mathscr{A}(k\alpha)=0.$$

这就是说，$\mathscr{A}^{-1}(0)$ 对加法与数量乘法是封闭的. 又因为 $\mathscr{A}(0)=0$，所以 $0\in\mathscr{A}^{-1}(0)$，即 $\mathscr{A}^{-1}(0)$ 是非空的. 所以 $\mathscr{A}^{-1}(0)$ 是 V 的子空间.

证毕

$\mathscr{A}V$ 的维数称为 $\mathscr{A}$ 的**秩**，$\mathscr{A}^{-1}(0)$ 的维数称为 $\mathscr{A}$ 的**零度**.

例 1 在线性空间 $P[x]_n$ 中，令

$$\mathscr{D}(f(x))=f'(x).$$

则 $\mathscr{D}$ 的值域为 $P[x]_{n-1}$，$\mathscr{D}$ 的核为子空间 P.

三、$\mathscr{A}$ 的值域的结构

定理 10 设 $\mathscr{A}$ 是 n 维线性空间 V 的线性变换，$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 是 V 的一组基，在这组基下，$\mathscr{A}$ 的矩阵是 A，则

1) 线性变换 $\mathscr{A}$ 的值域 $\mathscr{A}V$ 是由基像组生成的子空间，

即
$$\mathscr{A}V = L(\mathscr{A}\varepsilon_1, \mathscr{A}\varepsilon_2, \ldots, \mathscr{A}\varepsilon_n).$$

2) 线性变换 $\mathscr{A}$ 的秩 = 矩阵 A 的秩.

证明 1) 设 ξ 是 V 的任一向量，可用基表示为

$$\xi = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \dots + x_n\varepsilon_n .$$

于是

$$\mathcal{A}\xi = x_1\mathcal{A}\varepsilon_1 + x_2\mathcal{A}\varepsilon_2 + \dots + x_n\mathcal{A}\varepsilon_n .$$

这个式子说明，$\mathcal{A}\xi \in L(\mathcal{A}\varepsilon_1, \mathcal{A}\varepsilon_2, \dots, \mathcal{A}\varepsilon_n)$，

因此 $\mathcal{A}V \subset L(\mathcal{A}\varepsilon_1, \mathcal{A}\varepsilon_2, \dots, \mathcal{A}\varepsilon_n)$. 这个式子还表明基像组的线性组合还是一个像，也即

$$L(\mathcal{A}\varepsilon_1, \mathcal{A}\varepsilon_2, \dots, \mathcal{A}\varepsilon_n) \subset \mathcal{A}V .$$

于是就有

$$\mathscr{A}V = L(\mathscr{A}\varepsilon_1, \mathscr{A}\varepsilon_2, \ldots, \mathscr{A}\varepsilon_n).$$

2) 根据 1) 线性变换$\mathscr{A}$的秩等于基像组的秩. 另一方面，矩阵 A 是由基像组的坐标按列排列成的.

若在 n 维线性空间 V 中取定了一组基之后，把 V 的每一个向量与它的坐标对应起来，就得到了 V 到 P^n 的同构对应.

同构对应保持向量组的一切线性关系，因此基像组与它们的坐标组(即矩阵 A 的列向量组)有相同的秩.

证毕

四、$\mathscr{A}$ 的秩、零度与空间维数的关系

定理 11 设$\mathscr{A}$是 n 维线性空间 V 的线性变换.则 $\mathscr{A}V$ 的一组基的原像及 $\mathscr{A}^{-1}(0)$的一组基合起来就是 V 的一组基.由此还有

$$\mathscr{A}\text{的秩} + \mathscr{A}\text{的零度} = n .$$

证明 设 $\mathscr{A}V$ 的一组基为 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r$，它们的原像为 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r$，$\mathscr{A}\varepsilon_i = \eta_i$， $i = 1, 2, \dots, r$.

又取 $\mathscr{A}^{-1}(0)$ 的一组基为 $\varepsilon_{r+1}, \varepsilon_{r+2}, \dots, \varepsilon_s$. 现在来

证明 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_r, \varepsilon_{r+1}, \varepsilon_{r+2}, \ldots, \varepsilon_s$ 为 V 的基. 若有

$$l_1\varepsilon_1 + l_2\varepsilon_2 + \ldots + l_r\varepsilon_r + l_{r+1}\varepsilon_{r+1} + \ldots + l_s\varepsilon_s = 0 .$$

用$\mathscr{A}$去变它的两端的向量，得

$$l_1\mathscr{A}\varepsilon_1 + l_2\mathscr{A}\varepsilon_2 + \ldots + l_r\mathscr{A}\varepsilon_r$$

$$+ l_{r+1}\mathscr{A}\varepsilon_{r+1} + \ldots + l_s\mathscr{A}\varepsilon_s = \mathscr{A}0 = 0 .$$

因 $\varepsilon_{r+1}, \varepsilon_{r+2}, \ldots, \varepsilon_s$ 属于$\mathscr{A}^{-1}(0)$，故

$$\mathscr{A}\varepsilon_{r+1} = \mathscr{A}\varepsilon_{r+2} = \ldots = \mathscr{A}\varepsilon_s = 0 .$$

又 $\mathscr{A}\varepsilon_i = \eta_i$， $i = 1, 2, \ldots, r$． 于是上式就变成

$$l_1\eta_1 + l_2\eta_2 + \ldots + l_r\eta_r = 0 .$$

但 $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_r$ 是线性无关的，有

$$l_1 = l_2 = \ldots = l_r = 0 .$$

于是等式 $l_1\varepsilon_1 + l_2\varepsilon_2 + \ldots + l_r\varepsilon_r + l_{r+1}\varepsilon_{r+1} + \ldots + l_s\varepsilon_s = 0$

就变成

$$l_{r+1}\varepsilon_{r+1} + \ldots + l_s\varepsilon_s = 0 .$$

又因为 $\varepsilon_{r+1}, \varepsilon_{r+2}, \ldots, \varepsilon_s$ 是 $\mathscr{A}^{-1}(0)$ 的基也线性无关，

就有 $$l_{r+1} = \ldots = l_s = 0 .$$

这就证明了 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_r, \varepsilon_{r+1}, \ldots, \varepsilon_s$ 是线性无关的.

再证 V 的任一向量 α 是

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_r, \varepsilon_{r+1}, \ldots, \varepsilon_s$$

的线性组合. 由 $\eta_1 = \mathscr{A}\varepsilon_1, \ldots, \eta_r = \mathscr{A}\varepsilon_r$ 是 $\mathscr{A}V$ 的基，就有一组数

$$l_1, l_2, \ldots, l_r$$

使

$$\mathscr{A}\alpha = l_1\mathscr{A}\varepsilon_1 + l_2\mathscr{A}\varepsilon_2 + \ldots + l_r\mathscr{A}\varepsilon_r$$

$$= \mathscr{A}(l_1\varepsilon_1 + l_2\varepsilon_2 + \ldots + l_r\varepsilon_r).$$

于是

$$\mathscr{A}(\alpha - l_1\varepsilon_1 - l_2\varepsilon_2 - \ldots - l_r\varepsilon_r) = 0,$$

即 $$\alpha - l_1\varepsilon_1 - l_2\varepsilon_2 - \ldots - l_r\varepsilon_r \in \mathscr{A}^{-1}(0).$$

又因为 $\varepsilon_{r+1}, \varepsilon_{r+2}, \ldots, \varepsilon_s$ 是 $\mathscr{A}^{-1}(0)$ 的基，必有一组数

$$l_{r+1}, l_{r+2}, \ldots, l_s$$

使

$$\alpha - l_1\varepsilon_1 - l_2\varepsilon_2 - \ldots - l_r\varepsilon_r = l_{r+1}\varepsilon_{r+1} + \ldots + l_s\varepsilon_s$$

于是就有

$$\alpha = l_1\varepsilon_1 + l_2\varepsilon_2 + \ldots + l_r\varepsilon_r + l_{r+1}\varepsilon_{r+1} + \ldots + l_s\varepsilon_s$$

这就说明 α 是 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_r, \varepsilon_{r+1}, \ldots, \varepsilon_s$ 的线性组合.

也就证明了 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_r, \varepsilon_{r+1}, \ldots, \varepsilon_s$ 是 V 的一组基.

由 V 的维数为 n，知 $s = n$. 又 r 是 $\mathscr{A}V$ 的维数也即 $\mathscr{A}$ 的秩， $s - r = n - r$ 是 $\mathscr{A}^{-1}(0)$ 的维数，即 $\mathscr{A}$ 的零度. 因而

$$\mathscr{A}\text{的秩} + \mathscr{A}\text{的零度} = n.$$

证毕

推论 对于有限维线性空间的线性变换，它是单射的充分必要条件为它是满射.

证明 显然，当且仅当 $\mathscr{A}V = V$，即 $\mathscr{A}$的秩为 n 时，$\mathscr{A}$是满射；另外，当且仅当 $\mathscr{A}^{1}(0) = \{0\}$ 即 $\mathscr{A}$的零度为 0 时，$\mathscr{A}$是单射，于是由上述定理即可得出结论.

证毕

应该指出，虽然子空间 $\mathscr{A}V$ 与 $\mathscr{A}^{1}(0)$ 的维数之和为 n，但是 $\mathscr{A}V + \mathscr{A}^{1}(0)$ 并不是整个空间.

文山学院 WENSHAN UNIVERSITY

例如　在线性空间 $P[x]_n$ 中，令

$$\mathcal{D}(f(x)) = f'(x).$$

则 $\mathcal{D}$ 的值域为 $P[x]_{n-1}$，$\mathcal{D}$ 的核为子空间 P. 若令 $V = P[x]_n$，则

$$\mathcal{D}V = P[x]_{n-1},$$

$$\mathcal{D}^{-1}(0) = P,$$

$\mathcal{D}$ 的秩 $= n-1$，$\mathcal{D}$ 的零度 $= 1$，但

$$\mathcal{D}V + \mathcal{D}^{-1}(0) = P[x]_{n-1} + P = P[x]_{n-1} \neq P[x]_n.$$

五、举例

例 2 设线性变换 $\mathscr{A}$ 在三维线性空间 V 的一组基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的矩阵是

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) 求 $\mathscr{A}$在基 η_1, η_2, η_3 下的矩阵，其中：

$$\eta_1 = 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 3\varepsilon_3,$$

$$\eta_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 2\varepsilon_3,$$

$$\eta_3 = -\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3.$$

(2) 求 $\mathscr{A}$ 的值域 $\mathscr{A}V$ 和核 $\mathscr{A}^{-1}(0)$；

(3) 把 $\mathscr{A}V$ 的基扩充为 V 的基，并求 $\mathscr{A}$ 在这组基下的矩阵；

(4) 把 $\mathscr{A}^{-1}(0)$ 的基扩充为 V 的基，并求 $\mathscr{A}$ 在这组基下的矩阵.

(1) 解

(2) 解

(3) 解

(4) 解

例 3 设 A 是一个 $n\times n$ 矩阵，$A^2=A$．证明 A 相似于一个对角矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

文山学院 WENSHAN UNIVERSITY

证明 取一 n 维线性空间 V 以及 V 的一组基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$. 定义线性变换 $\mathscr{A}$ 如下：

$$\mathscr{A}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)A.$$

下面来证明，$\mathscr{A}$ 在一组适当的基下的矩阵是(1). 这样，由定理 4 也就证明了所要的结论.

由 $A^2 = A$，可知 $\mathscr{A}^2 = \mathscr{A}$. 我们取 $\mathscr{A}V$ 的一组基为 $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_r$. 由

$$\mathscr{A}\eta_1 = \eta_1, \ldots, \mathscr{A}\eta_r = \eta_r,$$

它们的原像也是 $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_r$.

再取 $\mathscr{A}^{-1}(0)$ 的一组基为 $\eta_{r+1}, \dots, \eta_n$. 由

定理 10 知： $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r, \eta_{r+1}, \dots, \eta_n$ 是 V

的一组基. 在这组基下，$\mathscr{A}$ 的矩阵就是 (1) .

证毕