第六节　行列式按一行（列）展开

主要内容

- 问题的提出
- 余子式和代数余子式
- 行列式按行(列)展开定理
- 3级行列式的几何意义
- 行列式计算举例

一、问题的提出

在2.4中，把 n 级行列式的定义中的$n!$ 项分成 n 组，

每组提取公因式后得到如下结果：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

$$i = 1, 2, \ldots, n .$$

那么这些 A_{ij} , $i, j = 1, 2, \ldots, n$, 究竟是什么呢？

引理1

$$d=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}=?$$

$$d=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}. \qquad (1)$$

问：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = ?$$

以三级行列式为例，探究$A_{ij}=?$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32} \end{array}$$

$$=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})$$

$$=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$$

于是就有 $A_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $A_{12}=-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$， $A_{13}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

$$A_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \boxed{a_{22}} & \boxed{a_{23}} \\ a_{31} & \boxed{a_{32}} & \boxed{a_{33}} \end{vmatrix}$$

特点：划掉了a_{11}所在的行和列

$$A_{12}=-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \boxed{a_{21}} & a_{22} & \boxed{a_{23}} \\ \boxed{a_{31}} & a_{32} & \boxed{a_{33}} \end{vmatrix}$$

特点：划掉了a_{12}所在的行和列

$$A_{13}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \boxed{a_{21}} & \boxed{a_{22}} & a_{23} \\ \boxed{a_{31}} & \boxed{a_{32}} & a_{33} \end{vmatrix}$$

特点：划掉了a_{13}所在的行和列

二、余子式和代数余子式

定义 7 在 n 级行列式中，把元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后，剩下的元素按它们在原行列式中的相对位置组成的 $n-1$ 级行列式称为元素 a_{ij} 的**余子式**，记作 M_{ij}.

按这个定义，对于三级行列式，有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}$$

下证 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

证明 因为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{ij}A_{ij}+\cdots+a_{in}A_{in}$$

$i=1,2,\ldots,n$.

所以在上式令$a_{i1}=\cdots=a_{i,j-1}=a_{i,j+1}=\cdots=a_{in}=0, a_{ij}=1$

得

$$A_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为了利用引理1的结论，把 A_{ij} 的行作如下调换：

把 A_{ij} 的第 i 行依次与第 $i+1$ 行、第 $i+1$行与第 $i+2$ 行、…、第 n-1 行第 n 行对调，这样 $a_{ij}=1$就调到原来 a_{nj} 位置上，调换的次数为 $n-i$，于是就有

$$A_{ij}=(-1)^{n-i}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

再把 A_{ij} 的第 j 列依次与第 $j+1$ 列、第 $j+1$ 列与第 $j+2$ 列、…、第 $n-1$列与第 n 列对调，这样就使 $a_{ij}=1$ 调到第 n 行第n 列的位置，调换的次数为 $n-j$，所以

$$A_{ij}=(-1)^{(n-i)+(n-j)}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1j} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,j} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{2n-(i+j)}M_{ij} \qquad =(-1)^{(i+j)}M_{ij}\,.$$

证毕

定义 8　称 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的 代数余子式.

例 1 (1)求行列式的2行5列元素2的余子式和代数余子式.

$$D=\begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 7 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

三、行列式按行(列)展开定理

定理 3 设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

A_{ij} 表示元素 a_{ij} 的代数余子式，则下列公式成立：

$$a_{k1}A_{i1}+a_{k2}A_{i2}+\cdots+a_{kn}A_{in}=\begin{cases} D\,,\text{当}k=i\text{时} \\ 0\,,\text{当}k\neq i\text{时} \end{cases}$$

$$a_{1l}A_{1j}+a_{2l}A_{2j}+\cdots+a_{nl}A_{nj}=\begin{cases} D, & \text{当 } l=j, \\ 0, & \text{当 } l\neq j. \end{cases}$$

用连加号简写为

$$\sum_{s=1}^{n} a_{ks}A_{is}=\begin{cases} D, & \text{当 } k=i, \\ 0, & \text{当 } k\neq i; \end{cases} \qquad \sum_{s=1}^{n} a_{sl}A_{sj}=\begin{cases} D, & \text{当 } l=j, \\ 0, & \text{当 } l\neq j. \end{cases}$$

证明

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+0+\cdots+0 & 0+a_{i2}+\cdots+0 & \cdots & 0+\cdots+0+a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ \\ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \\ 0 & a_{i2} & 0 & \cdots & 0 \\ \\ \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{in} \\ \\ \end{vmatrix}$$

$$= a_{i1}(-1)^{i+1} M_{i1} + a_{i2}(-1)^{i+2} M_{i2} + \cdots + a_{in}(-1)^{i+n} M_{in}$$

$$= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}.$$

当$a_{ij}=a_{kj}$时, $j=1, 2, \ldots, n$, $k \neq i$,把上式的 a_{ij} 换成 a_{kj} 得

$$D = a_{k1}A_{i1} + a_{k2}A_{i2} + \cdots + a_{kn}A_{in}.$$

于是就有

$$D = a_{k1}A_{i1} + a_{k2}A_{i2} + \cdots + a_{kn}A_{in} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

故行列式的值等于零.

证毕

四、3 级行列式的几何意义

设 3 级行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

的行是向量 α_1、α_2、α_3 在直角坐标系下的坐标,

即 $\alpha_1=(a_{11},a_{12},a_{13}),\alpha_2=(a_{21},a_{22},a_{23}),\ \alpha_3=(a_{31},a_{32},a_{33})$.

那么

$$\alpha_2\times\alpha_3=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\vec{i}A_{11}+\vec{j}A_{12}+\vec{k}A_{13}=(A_{11},A_{12},A_{13}$$

于是

$$a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=\alpha_1\cdot(\alpha_2\times\alpha_3),$$

$$a_{21}A_{11}+a_{22}A_{12}+a_{23}A_{13}=\alpha_2\cdot(\alpha_2\times\alpha_3)=0,$$

$$a_{31}A_{11}+a_{32}A_{12}+a_{33}A_{13}=\alpha_3\cdot(\alpha_2\times\alpha_3)=0,$$

由此可得

三个向量α_1、α_2、α_3共面的充要条件是：它们的坐标构成的 3 级行列式 $d=0$；若 $d\neq 0$，则 $|d|$ 表示以这三条向量为邻边的平行六面体的体积.

五、行列式计算举例

例 1 (1)求行列式的2行5列元素2的余子式和代数余子式.

(2)求行列式D的值.

(3)求$2A_{14}+5A_{24}+A_{34}+4A_{44}+5A_{54}$.

(4)求$A_{14}+A_{24}+A_{34}+A_{44}+A_{54}$.

$$D=\begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 7 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

例 2 行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

称为 n 级的**范德蒙德** (Vandermonde) 行列式.

证明

$$d = \prod_{1 \le j < i \le n} (a_i - a_j).$$

证：（数学归纳法）

$1^0 \quad n=2$ 时，$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1$．　结论成立．

2^0　假设对于$n-1$级范德蒙行列式结论成立．即

$$D_{n-1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_{n-1}^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & \cdots & a_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le j < i \le n-1} (a_i - a_j)$$

下证对于 n 级范德蒙行列式 D_n 结论也成立.

把D_n 从第 n-1 行开始依次往上，前面一行乘 $-a_n$ 加到后面的一行得

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a_1 - a_n & a_2 - a_n & \cdots & a_{n-1} - a_n & 0 \\ a_1^2 - a_1 a_n & a_2^2 - a_2 a_n & \cdots & a_{n-1}^2 - a_{n-1} a_n & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_1^{n-1} - a_1^{n-2} a_n & a_2^{n-1} - a_2^{n-2} a_n & \cdots & a_{n-1}^{n-1} - a_{n-1}^{n-2} a_n & 0 \end{vmatrix}$$

文山学院 WENSHAN UNIVERSITY

$$=(-1)^{1+n}\begin{vmatrix} a_1-a_n & a_2-a_n & \cdots & a_{n-1}-a_n \\ a_1^2-a_1a_n & a_2^2-a_2a_n & \cdots & a_{n-1}^2-a_{n-1}a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{n-1}-a_1^{n-2}a_n & a_2^{n-1}-a_2^{n-2}a_n & \cdots & a_{n-1}^{n-1}-a_{n-1}^{n-2}a_n \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{1+n}(a_1-a_n)(a_2-a_n)\cdots(a_{n-1}-a_n)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_{n-1}^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & \cdots & a_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix}$$

D_{n-1}

$$=(a_n-a_1)(a_n-a_2)\cdots(a_n-a_{n-1})\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_{n-1}^2 \\ \cdots & \cdots\cdots & & \cdots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & \cdots & a_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$=(a_n-a_1)(a_n-a_2)\cdots(a_n-a_{n-1})\prod_{1\le j<i\le n-1}(a_i-a_j)$$

$$=\prod_{1\le j<i\le n}(a_i-a_j)$$

范德蒙行列式 $D_n=0 \Leftrightarrow a_1,a_2\cdots a_n$ 中至少两个相等.

例 3　证明

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{r1} & \cdots & c_{rk} & b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix}.$$

证明　对 k 用数学归纳法.

当 $k=1$ 时，上式左边为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{r1} & b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix}$$

按第一行展开，就得到所要的结论.

假设当 $k = m - 1$ 时结论成立，即左边行列式的左上角是 $m - 1$ 级时已经成立，现在再来证明 $k=m$ 时，结论也成立. 当 $k=m$ 时，按第一行展开，有

文山學院 WENSHAN UNIVERSITY

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1m} & b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{r1} & \cdots & c_{rm} & b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix}$$

$$
= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2m} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m2} & \cdots & a_{mm} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{12} & \cdots & c_{1m} & b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{r2} & \cdots & c_{rm} & b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix} + \cdots
$$

$$+(-1)^{1+i}a_{1i}\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,i-1} & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2m} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{m,i-1} & a_{m,i+1} & \cdots & a_{mm} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1,i-1} & c_{1,i+1} & \cdots & c_{1m} & b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ c_{r1} & \cdots & c_{r,i-1} & c_{r,i+1} & \cdots & c_{rm} & b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix}$$

$$+\cdots+(-1)^{1+m}a_{1m}\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,m-1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{m,m-1} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1,m-1} & b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{r1} & \cdots & c_{r,m-1} & b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix}$$

$$
= \left[a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} + \cdots \right.
$$

$$
+ (-1)^{1+i} a_{1i} \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,i-1} & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{m,i-1} & a_{m,i+1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix}
$$

$$
\left. + \cdots + (-1)^{1+m} a_{1m} \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,m-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{m,m-1} \end{vmatrix} \right] \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix}.
$$

根据归纳法原理，结论普遍成立.

证毕

例 4 已知 $D=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & f \\ b_1 & b_2 & b_3 & f \\ c_1 & c_2 & c_3 & f \\ d_1 & d_2 & d_3 & f \end{vmatrix}$ 求 $A_{11}+A_{21}+A_{31}+A_{41}=?$

小结和作业

1. 请叙行列式的中某个元素的余子式和代数余子式，及其区别于联系.

2. 请叙述定理4及其意义.

3.作业见学习通.