第 3 章　平面与空间直线

§3.1　平面的方程

授课学时：2 学时

一、教学目标

1. 理解并掌握的由平面上一点与平面的方位向量决定的平面方程、平面的一般方程、平面的法式方程求解方法；

2. 熟练掌握平面的一般方程，快速写出相应平面的方程。

二、教学重难点

1.教学重点：求由平面上一点与平面的方位向量决定的平面方程、平面的一般方程、平面的法式方程的一般方法和步骤；

2.教学难点：根据平面方程的规律，写出平面的方程。

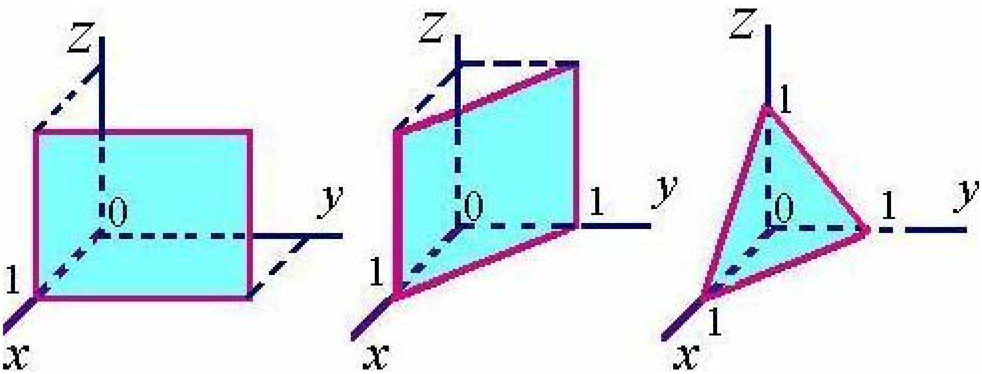
三、教学方法

多媒体辅助教学、讲练和探究式相结合教学法

四、教学过程

一．联系实际引入

1. **想一想：**构成这此物体的平面具有什么样的特征？



2. **思考：**这些平面的方程如何表示？

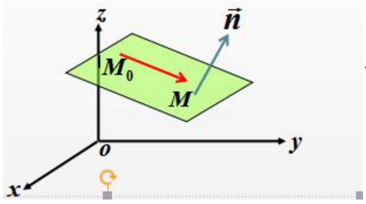
二．讲授新知

一、平面的点法式方程

如果在空间给定一点 M0 和一个非零向量　，那么通过点 M0 与向量　的平面也惟一地被确定.

法向量 的特征：非零且垂直于平面内的任一向量.

已知：$\vec{n}=\{A,B,C\}$, $M_0(x_0,y_0,z_0)$,



$+D=0$

设平面上的任一点为 $M(x,y,z)$

必有：

$\overrightarrow{M_0M}\perp\vec{n}$

$\overrightarrow{M_0M}\cdot\vec{n}=0$

$\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$

$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ 即为平面的点法式方程

其中法向量 $\vec{n}=\{A,B,C\}$，已知点 (x_0,y_0,z_0).

1．平面的点法式方程

平面的法线： 垂直于平面的直线称为这平面的法线。

平面的法矢量： 垂直于平面的非零矢量称为这平面的法矢量。

设 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 是平面上一定点，$OM_0=r_0$,矢量 $n=\{A,B,C\}$为平面 的法矢量，再设 $M(x,y,z)$ 是平面 上任一点，$OM=r$ ，

则平面的点法式方程为： $(r-r_0)\cdot n=0$

即 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

证明：∵ $M_0M\in$ ，$n\perp$

∴ $M_0M\perp$ ，

∴ $M_0M\cdot n=0$

$M_0M=r-r_0$

$(r-r_0)\cdot n=0$

$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

2．平面的点位式方程

平面的方位矢量： 与平面平行的一对为共线的矢量称为这平面的方位矢量。

设 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 是平面 上一定点，$OM_0=r_0$

，矢量$v_1=\{X_1,Y_1,Z_1\}$, $v_2=\{X_2,Y_2,Z_2\}$为平面 的一对方位矢量，再设 $M(x,y,z)$ 是平面 上任一点，$OM=r$ ，则平面

二. 平面的一般方程

定理 空间中任一平面的方程都可以表示成一个关于变量 x,y,z 的一次方程；

反过来，每一个关于变量 x,y,z 的一次方程都表示一个平面，叫做平面的一般方程。

1．定理：空间中任一平面的方程都可表示成一个关于变数 x, y, z 的一次方程；反过来，每一个关于 x, y, z 的一次方程都表示一个平面.

证明：(1)对于空间任一个平面，可设其法矢量为 $n=\{A,B,C\}$，点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 为平面上一定点，则平面方程 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$，

即 $Ax+By+Cz+D=0$

（其中 $D=Ax_0+By_0+Cz_0$ ）

(2)对任意的一个关于 x, y, z 的一次方程 $Ax+By+Cz+D=0$（ A, B, C 不全为零），不妨设 $A\neq 0$，则有所以称 $Ax+By+Cz+D=0$ （ A, B, C 不全为零）为平面的一般方程

三、平面的截距式方程

将 $\mathrm{A}=-D/a$, $\mathrm{B}=-D/b$, $C=-D/c$

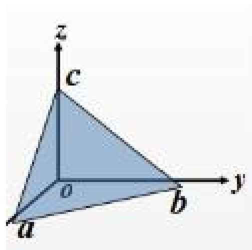
代入所设方程得

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

例 1：求过点（1,1,1）且垂直于平面的平面方程. $3x+2y-12z+5=0$

$\vec{n}_1=\{1,-1,1\}$, $\vec{n}_2=\{3,2,-12\}$

取法向量：$\vec{n}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2 \quad =\{10,15,5\}$,



所求平面方程为

$10(x-1)+15(y-1)+5(z-1)=0$,

化简得

$2x+3y+z-6=0$.

例 2：设平面过原点及点（6，-3,2)，且垂直，$4x-y+2z=8$ 求此平面方程.

解　　设平面方程为 $Ax+By+Cz+D=0$,

由平面过原点知

$D=0$,

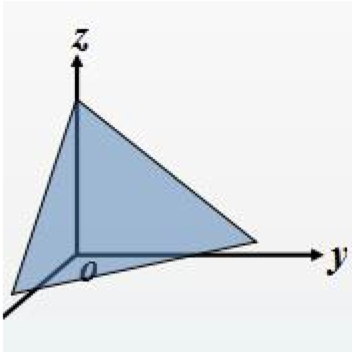
$6A-3B+2C=0$

$\because \vec{n}\perp\{4,-1,2\}$, $\therefore 4A-B+2C=0$

$\Rightarrow A=B=-\frac{2}{3}C$,

所求平面方程为 $2x+2y-3z=0.$

例 3 设平面与 $x, y, z,$ 三轴分别交于 $p(a,0,0)$ 、$Q(0,b,0)$ 、$R(0,0,c)$ （其中 $a\neq 0, b\neq 0, c\neq 0$ ），求此平面方程.



解　设平面方程为 $Ax+By+Cz+D=0,$

将三点坐标代入得

$$\begin{cases} aA+D=0, \\ bB+D=0, \\ cC+D=0, \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad A=-\frac{D}{a}, \quad B=-\frac{D}{b}, \qquad C=-\frac{D}{c}$$

例4 求平行于平面 $6x+y+6z+5=0$ 而与三个坐标所围成的四面体体积为一个单位的平面方程.

解：设平面方程为 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1,$

$\because V=1, \ \therefore \ \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}|abc|=1,$ 由所求平面与已知平面平行得

（向量平行的充要条件）

$$\frac{1/a}{6}=\frac{1/b}{1}=\frac{1/c}{6},$$

$$\frac{1}{6a}=\frac{1}{b}=\frac{1}{6c},$$

$\frac{1}{6a}=\frac{1}{b}=\frac{1}{6c}=t$

$$\Rightarrow a=\frac{1}{6t}, \quad b=\frac{1}{t}, \quad c=\frac{1}{6t},$$

代入体积式

$$\therefore 1=\frac{1}{6}\cdot\left|\frac{1}{6t}\cdot\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{6t}\right| \quad \Rightarrow t=\pm\frac{1}{6},$$

$$\therefore a=\pm 1, \quad b=\pm 6, \quad c=\pm 1,$$

所求平面方程为 $6x+y+6z=6.$

或 $6x+y+6z=-6$

三．课堂小结

1.确定平面的关键要素：平面上一点和一个法向量；

2.平面方程之间的相互关系。

3.平面方程是空间曲面的重要组成部分，它与由平面上一点与平面的方位向量决定的平面方程、平面的一般方程、平面的法式方程等内容都有密切的联系.

思考题：

平面方程还有哪些表示形式？

四．布置作业

P_{104}　$1(1)、(2)$；　3

§3.2　平面与点的相关位置

授课学时：2 学时

一、教学目标（正文一律用宋体小四，行距：固定值 24 磅）

1. 理解并掌握平面与点的相关位置，平面与点的相关位置关系的求解法；

2. 熟练掌握平面与点的相关位置的规律，快速写出相应平面与点的相关位置。

二、教学重难点

1.教学重点：点在平面上:点的坐标满足平面方程;

点不在平面上:求点到平面的距离.

2.教学难点：根据求平面与点的相关位置的规律。

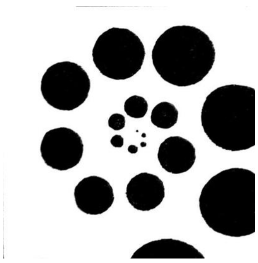
三、教学方法

多媒体辅助教学、讲练和探究式相结合教学法

四、教学过程

一．联系实际引入

1. **想一想：**构成这此图像具有什么样的特征？

2. **思考：**这些特征间存在怎样的关系？

二．讲授新知

1. 定义

点与平面间的距离：一点与平面上的点之间的最短距离，叫做该点与平面之间的距离.

2. 平面与点的相关位置

空间中平面与点的相关位置，有且只有两种情况就是点在平面上，或点不在平面上，点在平面上的条件是点的坐标满足平面的方程（点不在平面上时要考虑点到平面的离差，点到平面的距离）。

3. 如果自点M_0到平面π引垂线，垂足为Q，那么向量$\overrightarrow{QM_0}$在平面π的单位法向量

n^0上的射影叫做点M_0与平面π间的**离差**。记做

$$\delta = 射影_{n^0}\overrightarrow{QM_0}$$

推论 1　点$M_0(x_0, y_0, z_0)$与平面平面间的离差是

$$\delta = x_0 \cos\alpha + y_0 \cos\beta + z_0 \cos\gamma - p$$

推论 2　点点$M_0(x_0, y_0, z_0)$与平面$Ax + By + Cz + D = 0$间的**距离**为

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

三、平面划分空间问题，三元一次不等式的几何意义

平面$\pi: Ax + By + Cz + D = 0$

把空间划分为两部分，对于某一部分的点

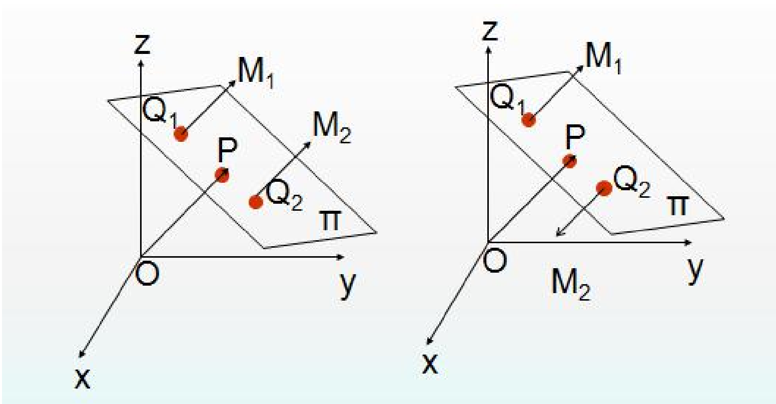
$$Ax + By + Cz + D < 0$$

而对于另一部分的点，则有

$$Ax + By + Cz + D > 0$$

在平面π上的点

$$Ax + By + Cz + D = 0$$



三、平面划分空间问题，　三元一次不等式的几何意义

结论：

若点$M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$不在平面$\pi: Ax+By+Cc+D=0$上，

则M_1,M_2位于平面π同侧的充要条件是：

$$F_1=Ax_1+By_1+Cz_1+DF_2=Ax_2+By_2+Cz_2D\text{同号}$$

则M_1,M_2位于平面π两侧的充要条件是：

$$F_1=Ax_1+By_1+Cz_1+DF_2=Ax_2+By_2+Cz_2D\text{异号}$$

4.**应用举例**

例 1 设点$M(-2,4,3)$，平面$\pi: 2x-1y+2z+3=0$，求点M到平面π间的距离

解： 由于$M(-2,4,3)$ 平面$\pi: 2x-1y+2z+3=0$

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$=\frac{|2\times(-2)-1\times 4+2\times 3+3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}$$

$$=\frac{1}{3}$$

例 2 已知平面 x+2y-3z+4=0，点 O（0，0，0），A（1，1，4），B（1，0，-2），C（2，0，2），D（0，0，4）试确定这些点与平面的位置关系.

解： 设 f（x，y，z）=x+2y-3z+4，则有

f（O（0，0，0））=4>0，f（A（1，1，4））=-5<0，

F（B（1，0，-2））=15>0，f（C（2，0，2））=0，

F（D（0，0，4））=-8<0

所以，点 O、B 在平面的同一侧，而点 A、F 在平面的另一侧，点 C 在平面上.

三．课堂小结

1.两点在平面哪侧的判断；

2.点到平面的距离为非负数。

思考题:

试求由于平面$\pi_1: 2x-1y+2z-3=0$，π_2：$3x+2y-6z-1=0$

所构成的二面角平分面的方程，在此二面角内有点 M(1,2,-3)

四．布置作业

P_{111}　1(1)(3) 2(1) 3(1)

§3.3　两平面的相关位置

授课学时：2 学时

一、教学目标（正文一律用宋体小四，行距：固定值 24 磅）

1. 理解并掌握空间两个平面的相关位置，即相交、平行，以及这三种情况的判断依据和求解方法；

2. 熟练掌握两平面位置的方程，快速写出两平面夹角的求解方程。

二、教学重难点

1.教学重点：两平面平行、相交和重合的充要条件，在直角坐标系中两平面的交角求解及两平面垂直的条件；

2.教学难点：根据求两平面的相关位置的规律，写出对应充要条件及夹角公式。

三、教学方法

多媒体辅助教学、讲练和探究式相结合教学法

四、教学过程

一．联系实际引入

1. 想一想：下面的两两平面具有什么样的关系？

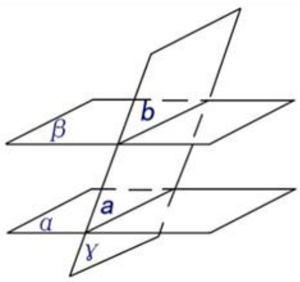


图 9-46

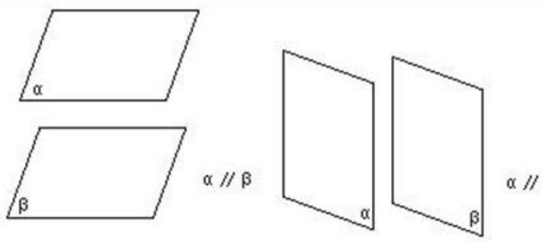


图 1-102

2. **思考：**这些曲面的方程如何表示？

二．讲授新知

1. 定义：空间两个平面的相关位置有三种情形：相交、平行和重合，而且当且仅当两平面有一部分公共点时它们相交，当且仅当两平面无公共点时它们相互平

行，当且仅当一个平面上的所有点就是另一个平面的点时，这两个平面重合。

定理：两平面 $\pi_{1}: A_1x+B_1y-C_1z+D_1=0$， $\pi_2: A_2x+B_2y-C_2z+D_2=0$

那么两平面π_1与π_2是相交还是平行或是重合就决定于由方程（1）与（2）构成的方程组是有解还是无解，或是方程（1）与（2）仅相差一个不为零的数因子。

两平面的位置关系：

相交的充要条件是 $A_1:B_1:C_1 \neq A_2:B_2:C_2$，

平行的充要条件是 $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\neq\frac{D_1}{D_2}$

重合的充要条件是

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}$$

2.证明

在直角坐标系下,平面π_1，π_2的法向量分别为$n_1=\{A_1,B_1C_1\}$, $n_2=\{A_2B_2C_2\}$

而当且仅当n_1不平行于n_2时，π_1与π_2相交；

当且仅当$n_1 // n_2$时，π_1与π_2平行或是重合，

则有如下结论：

(1) $\Pi_1 \perp \Pi_2 \Longleftrightarrow n_1 \perp n_2 \Longleftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$

(2) $\Pi_1 // \Pi_2 \Longleftrightarrow n_1 // n_2 \Longleftrightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\neq\frac{D_1}{D_2}$

(3) $\Pi_1 = \Pi_2 \Longleftrightarrow n_1 \ // \ n_2$

$$\Longleftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$$

例 1 确定以下各组里两平面的位置关系：

(1) $2x - y + z = 0, \quad -4x + 2y - 2z - 1 = 0$

(2) $2x - y - z + 1 = 0, \quad -4x + 2y + 2z - 2 = 0$

解（1）

$$h_1 = \{2, -1, 1\}, \qquad h_2 = \{-4, 2, -2\} \to \frac{2}{-4} = \frac{-1}{2} = \frac{1}{-2},$$

两平面平行 $\Theta\ \boldsymbol{M(1,1,0)} \in \Pi_1 \quad \boldsymbol{M(1,1,0)} \notin \Pi_2$

两平面平行但不重合

（2）$\frac{2}{-4} = \frac{-1}{2} = \frac{-1}{2}$ ，两平面平行

$$\Theta\ \boldsymbol{M(1,1,0)} \in \Pi_1 \quad \boldsymbol{M(1,1,0)} \in \Pi_2$$

∴两平面重合.

二、两平面的夹角

1. 定义

两平面法向量之间的夹角称为两平面的夹角.

π_1: $A_1x+B_1y-C_1z+D_1=0$, π_2: $A_2x+B_2y-C_2z+D_2=0$

$h_1=\{A_1,B_1,C_1\}$, $h_2=\{A_2,B_2,C_2\}$,

2.证明

设两平面π_1与π_2间的二面角用∠（ π_1,π_2）来表示，而两平面的法矢量n_1与n_2的夹角记为θ =∠ （n_1,n_2），那么显然∠（ π_1,π_2）＝θ或π －θ ，

因此得到：$\cos<(\pi_1,\pi_2)=\pm\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$

例 2　求以下两平面的夹角

π_1: $-x+2y-z+1=0, \pi_2: y+3z-1=0$

解:$\cos\theta=\pm\frac{-1\times0+2\times1-1\times3}{\sqrt{(-1)^2+2^2+(-1)^2}.\sqrt{1^2+3^2}}$

$$\cos\theta=\mu\frac{1}{\sqrt{60}}$$

两平面相交，夹角 $\theta=\arccos\frac{1}{\sqrt{60}}$，或 $\pi-\arccos\frac{1}{\sqrt{60}}$

五、课堂小结

1. 平面与平面平行时,要考虑可能重合的情况;

2. 两平面间的夹角要考虑互补的情况。

3. 两平面相交、平行和重合的充要条件及其夹角;

4. 求两平面之间的夹角和距离。

思考题:

两平面平行$\pi_1: Ax + By - Cz + D_1 = 0$, $\pi_2: Ax + By - Cz + D_2 = 0$

间的距离。两平面互相垂直要如何判断?

四. 布置作业

p_{111} 2.(1) 3.(1)

§3.4　空间直线的方程

授课学时：2 学时

一、教学目标

1．掌握空间直线的点向式方程、两点式方程的求法。

2．会求空间直线的标准方程、一般方程的互化。

二、教学重难点

1.教学重点：空间直线的各种方程的求法；

2.教学难点：空间直线的标准方程、一般方程的互化。

三、教学方法

多媒体辅助教学、讲练和探究式相结合教学法

四、教学过程

1.导入

两平面的交线？

2.讲解新知

一．直线的点向式方程（由直线上一点与直线的方向所决定的直线方程）

1. 直线l的方向矢量$\vec{v}$：　$\vec{v}\neq 0$且$\vec{v}//l$

注1^0. 显然，任何一个与直线l平行的非零矢量都为l的方向矢量

2^0. 一条直线l由它过的一点M_0和它的一个方向矢量完全唯一确定。

3^0. 直线l的方向矢量$\vec{v}$的坐标x,y,z或与它成比例的一组数$l,m,n(x:y:z=l:m:n)$称为直线l的方向数，也称为l的方向。由于l的方向数与l的方向矢量的坐标x,y,z成比例，故我们将同$x:y:z$表以$\vec{v}=\{x,y,z\}$为方向矢量的直线的方向数。

2. 点向式方程

设l为一空间直线，$\vec{v}$为l的一个方向矢量。$M_0\in l$。取标架$\{o;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$. 设$\overline{OM_0}=\vec{r}_0$，$M$为$l$上的任意点，$\overline{OM}=\vec{r}$。

$$M\in l\Leftrightarrow \overline{M_0M}\text{ 与 }\vec{v}\text{ 共线}\overset{Th1.4.1}{\Leftrightarrow}\overline{M_0M}=t\vec{v}\Leftrightarrow \vec{r}-\vec{r}_0=t\vec{v}\Leftrightarrow \vec{r}=\vec{r}_0+t\vec{v}$$

故由空间曲线的向量式参数方程的定义知$\vec{r}=\vec{r}_0+t\vec{v}$　（3.4-1）为l的矢量式参数方程。其中t为参数，它可取任意实数。注意$\vec{r}_0$为以l所过点M_0为终点的径矢。$\vec{v}$为l的方向矢量。

设$M_0(x_0,y_0,z_0),M(x,y,z)$，则$\vec{r}_0=\{x_0,y_0,z_0\},\vec{r}=\{x,y,z\}$，再设$\vec{v}=\{X,Y,Z\}$，

则由（3.4-1）得：$\begin{cases} x = x_0 + Xt \\ y = y_0 + Yt \\ z = z_0 + Zt \end{cases}$　　（3.4-2）．称其为l的坐标式参数方程。

由（3.4-2）消去参数t，则得$\dfrac{x-x_0}{X} = \dfrac{y-y_0}{Y} = \dfrac{z-z_0}{Z}$　　（3.4-3），
称其为l的标准方程或对称式方程。

（3.4-1）～（3.4-3）都称为l的点向式方程。

注4^0．若已知直线l过$M_0(x_0, y_0, z_0)$，方向矢量为$\bar{v} = \{X, Y, Z\}$，可立即写出l的方程（3.4-2）和（3.4-3）。

注5^0．在直角坐标系下，直线l的方向矢量常取单位矢量$\bar{v}^0 = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$，此时$l$的参数方程为：　　$\bar{r} = \bar{r}_0 + t\bar{v}^0$　　（3.4-7）

或　　$\begin{cases} x = x_0 + t\cos\alpha \\ y = y_0 + t\cos\beta \\ z = z + t\cos\gamma \end{cases}$　　（3.4-8）

l的对称方程为：　　$\dfrac{x-x_0}{\cos\alpha} = \dfrac{y-y_0}{\cos\beta} = \dfrac{z-z_0}{\cos\gamma}$　　（3.4-9）

此时参数t的几何意义为：$|t| = |t||\bar{v}^0| = |t\bar{v}^0| = |\bar{r} - \bar{r}^0| = |\overline{MM_0}|$，即为$M_0$和$M$的距离。

注6^0．在直角坐标系下，设$\bar{v} = \{X, Y, Z\}$为直线l的方向矢量，$\bar{v}$的方向角α, β, γ称为l的方向角。$\bar{v}$的方向余弦$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$称为$l$的方向余弦。

由于$-\bar{v}$也是l的方向矢量，而$-\bar{v}$的方向角为$\pi-\alpha, \pi-\beta, \pi-\gamma$，故$\pi-\alpha, \pi-\beta, \pi-\gamma$也可看作$l$的方向角；

$\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha, \cos(\pi-\beta) = -\cos\beta, \cos(\pi-\gamma) = -\cos\gamma$ 也可看作l的方向余弦。

设l, m, n为直线l的方向数，则$\{l, m, n\}$或$\{-l, -m, -n\}$为l的方向矢量，由定义$\{l, m, n\}$或$\{-l, -m, -n\}$的方向余弦即为l的方向余弦。故l的方向余弦与方向数之间有以下关系：

$$\cos\alpha = \frac{l}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}, \cos\beta = \frac{m}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}, \cos\gamma = \frac{n}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}} \qquad \text{(Th1.7.6)}$$

或$\cos\alpha=\dfrac{-l}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}},\cos\beta=\dfrac{-m}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}},\cos\gamma=\dfrac{-n}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$

二．直线的两点式方程

显然直线l完全由它通过的两点唯一确定。

设直线l过两点$M_1(x_1,y_1,z_1),M_2(x_2,y_2,z_2)$，求$l$的方程。

令$\vec{r}_i=\overline{OM_i},i=1,2$，取$\vec{v}=\overline{M_1M_2}=\vec{r}_2-\vec{r}_1$为$l$的方向矢量. 以$l$所过点$M_1$为终点的向量为$\vec{r}_1$.

故由直线的点向式方程：$\vec{r}=\vec{r}_0+t\vec{v}^0$得$l$的矢量式参数方程：$\vec{r}=\vec{r}_1+t(\vec{r}_2-\vec{r}_1)$　　（3. 4-4）

l的坐标式参数方程为：$\begin{cases}x=x_1+t(x_2-x_1)\\ y=y_1+t(y_2-y_1)\\ z=z_1+t(z_2-z_1)\end{cases}$　　（3.4-5）

l的对称式方程为：$\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$　　（3.4-6）

方程（3.4-4）～（3.4-6）都叫做l的两点式方程。

三．直线的一般方程

1. 概念：任意一条直线可看成某两个相交平面的交线。

设$\left.\begin{matrix}\pi_1:A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\ \pi_2:A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{matrix}\right\}$　　（3.4-11）（在仿射坐标系下的方程）

由于π_1与π_2相交，故这里$A_1:B_1:C_1\neq A_2:B_2:C_2$

$\because M(x,y,z)\in l\Leftrightarrow M(x,y,z)\in\pi_1\cap\pi_2\Leftrightarrow x,y,z$ 满足方程组

$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$

$\therefore l$可用方程组（3.4-11）表示，称其为l的一般方程。

四．直线的射影式方程

设l：$\dfrac{x-x_0}{X}=\dfrac{y-y_0}{Y}=\dfrac{z-z_0}{Z}$　　（3. 4-3）（在仿射坐标系下的方程）

则X,Y,Z不全为零（$\{X,Y,Z\}$为l的方向矢量，它非零）不妨设$Z\neq 0$. 将（3. 4-3）

改写为$\begin{cases}\dfrac{x-x_0}{X}=\dfrac{z-z_0}{Z}\\ \dfrac{y-y_0}{Y}=\dfrac{z-z_0}{Z}\end{cases}$，$\begin{cases}x=x_0+\dfrac{X}{Z}z-\dfrac{X}{Z}z_0\\ y=y_0+\dfrac{Y}{Z}z-\dfrac{Y}{Z}z_0\end{cases}$

令 $a=\dfrac{X}{Z},c=x_0-\dfrac{X}{Z}z_0,b=\dfrac{Y}{Z},d=y_0-\dfrac{Y}{Z}z_0$，则 $\begin{cases}x=az+c\\ y=bz+d\end{cases}$ （3.4-12）

（显然这是一种特殊的一般方程）

注 7^0．由以上讨论可见（3.4-3）表示的直线 l 可看作（3.4-12）中两个方程表示的两个平面的交线。这两个平面通过该交线且分别平行与 oy 轴和 ox 轴，在直角坐标系下，平面 $x=az+c$ 与 xoz 平面 $y=0$ 垂直（$\because 1\bullet 0+0\bullet 1+a\bullet 0=0$），平面 $y=bz+d$ 与 yoz 平面 $x=0$ 垂直。故称（3.4-12）为 l 的射影式方程。由以上讨论可知如何将 l 的标准方程化为射影式方程。

五．化直线的一般方程为标准方程的方法

直线的一般方程（3.4-11）也总可化成标准方程（3.4-4）的形式，下面证明之。

设 l 的一般方程为：$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$ （3.4-11） 则 $A_1:B_1:C_1\neq A_2:B_2:C_2$

因此，$\begin{vmatrix}B_1 & C_1\\ B_2 & C_2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}C_1 & A_1\\ C_2 & A_2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}$不全为零，否则，由$\begin{vmatrix}B_1 & C_1\\ B_2 & C_2\end{vmatrix}=0$得 $B_1C_2=B_2C_1$，即 $\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$.

由 $\begin{vmatrix}C_1 & A_1\\ C_2 & A_2\end{vmatrix}=0$ 得 $C_1A_2=C_2A_1$，即 $\dfrac{C_1}{C_2}=\dfrac{A_1}{A_2}$．故 $\dfrac{\mathrm{A}_1}{\mathrm{A}_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$，即 $A_1:B_1:C_1=A_2:B_2:C_2$，与 $A_1:B_1:C_1\neq A_2:B_2:C_2$ 矛盾。

不失一般性，设$\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}\neq 0$（$\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}$为 x,y 的系数行列式，那么由（3. 4-11）可分别消去 y,x 得到 l 的射影式方程）

将（3. 4-11）写成$\begin{cases}A_1x+B_1y=-C_1z-D_1\\ A_2x+B_2y=-C_2z-D_2\end{cases}$ （*）

由克莱姆法则解出x, y得：

$$x=\frac{\begin{vmatrix}-C_1z-D_1 & B_1\\ -C_2z-D_2 & B_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}}=\frac{-\begin{vmatrix}C_1 & B_1\\ C_2 & B_2\end{vmatrix}z-\begin{vmatrix}D_1 & B_1\\ D_2 & B_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix}B_1 & C_1\\ B_2 & C_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}}z+\frac{\begin{vmatrix}B_1 & D_1\\ B_2 & D_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}A_1 & -C_1z-D_1\\ A_2 & -C_2z-D_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix}C_1 & A_1\\ C_2 & A_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}}z+\frac{\begin{vmatrix}D_1 & A_1\\ D_2 & A_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}}$$

以上为l的射影式方程，令$\frac{\begin{vmatrix}B_1 & D_1\\ B_2 & D_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}}=x_0$，$\frac{\begin{vmatrix}D_1 & A_1\\ D_2 & A_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}}=y_0$，$z_0=0$则得$l$的标准方程：

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix}B_1 & C_1\\ B_2 & C_2\end{vmatrix}}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix}C_1 & A_1\\ C_2 & A_2\end{vmatrix}}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}} \qquad （**）$$

注8^0. 由l的标准方程（**）可知，若l的一般方程为（3.4-11），则

$$\begin{vmatrix}B_1 & C_1\\ B_2 & C_2\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}C_1 & A_1\\ C_2 & A_2\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}$$

即为l的一个方向向量的坐标，即为l的一组方向数。

注9^0.以上的证明给出了化直线的一般方程为射影式方程和标准方程的方法。哪两个变量的系数行列式不为零，分别消去这两个变量即得l的射影式方程，再由射影式方程得标准方程。也可如下求l的标准方程：不妨设$\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}\neq 0$，在方程（*）中取$z$为任意指定的值$z=z_0$（特别地可取$z=0$）。解（*）得$x=x_0, y=y_0$，那么$(x_0, y_0, z_0)$为方程组（3.4-11）的一个解。点$M_0(x_0, y_0, z_0)$在$l$上。再由注$8^0$得一组方向数。于是由直线的点向式方程（3.4-3）得l的标准方程为：$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix}B_1 & C_1\\ B_2 & C_2\end{vmatrix}}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix}C_1 & A_1\\ C_2 & A_2\end{vmatrix}}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}}$。

3.例题讲解

例. 化直线l的一般方程$\begin{cases} 2x+y+z-5=0 & (1) \\ 2x+y-3z-1=0 & (2) \end{cases}$ 为射影式方程和标准方程。

解法一. l的方向数为$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-4:8:0=1:(-2):0$

$\because y,z$的系数行列式$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=-4\neq 0$ （取x为自由未知量）

$\therefore$取$x=0$得$\begin{cases} y+z=5 \\ y-3z=1 \end{cases}$，解得$y=4, z=1$

故$(0,4,1)$为l上一点。

故l的标准方程为：$\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-4}{-2}=\dfrac{z-1}{0}$

由$\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-4}{-2}$ 得$x=-\dfrac{1}{2}y+2$。

由$\dfrac{x}{1}=\dfrac{z-1}{0}$ 得$z=1$。

$\begin{cases} y=-2x+4 \\ z=1 \end{cases}$为$l$的射影式方程。

解法二.

（2）+3×（1）：（消去z）$8x+4y-16=0, y=-2x+4$，

（1）-（2）：（消去y）$4z-4=0, z=1$

$\therefore \begin{cases} y=-2x+4 \\ z=1 \end{cases}$为$l$的射影式方程。

或

$\because y,z$的系数行列式$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=-4\neq 0$，$\therefore \begin{cases} y+z=5-2x \\ y-3z=1-2x \end{cases}$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 5-2x & 1 \\ 1-2x & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}}=\frac{-15+6x-1+2x}{-4}=-2x+4$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 5-2x\\ 1 & 1-2x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -3\end{vmatrix}}=\frac{1-2x-5+2x}{-4}=1$$

$\begin{cases} y=-2x+4 \\ z=1 \end{cases}$ 为l的射影式方程（$\because z=1$既是l对yoz面又是对xoz面的射影标面，故l只有一个射影式方程）

由 $y=-2x+4$ 得 $\dfrac{y-4}{-2}=\dfrac{x}{1}$

由$z=1$ 得 $z-1=0$，可写为$\dfrac{z-1}{0}=\dfrac{x}{1}$

故$\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-4}{-2}=\dfrac{z-1}{0}$为$l$的标准方程。

4．在直角坐标系下化一般方程为标准方程的方法

设直线l在直角坐标系下的一般方程为：$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$

则$\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ 的一个法矢量为$\vec{n}_1=\{A_1,B_1,C_1\}$

$\pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ 的一个法矢量为$\vec{n}_2=\{A_2,B_2,C_2\}$

$\because l\in\pi_1\bigcap\pi_2, \therefore l\perp\vec{n}_1$且$l\perp\vec{n}_2$，

又$\because (\vec{n}_1\times\vec{n}_2)\perp\vec{n}_1$且$(\vec{n}_1\times\vec{n}_2)\perp\vec{n}_2$，$\therefore (\vec{n}_1\times\vec{n}_2)//l$

故$(\vec{n}_1\times\vec{n}_2)$可取为$l$的方向矢量，再求得$l$的一个点$(x_0,y_0,z_0)$，即可得$l$的标准方程。

例　在直角坐标系下，求直线$l:\begin{cases} x-2y+3z-4=0 \\ x-2y-z=0 \end{cases}$ 的标准方程.

解：$\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\{1,-2,3\}\times\{1,-2,-1\}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -2 & 3\\ 1 & -2 & -1\end{vmatrix}=\{8,4,0\}=4\{2,1,0\}$，$l//\vec{n}_1\times\vec{n}_2$.

取$\vec{v}=\dfrac{1}{4}(\vec{n}_1\times\vec{n}_2)=\{2,1,0\}$为$l$的方向矢量

$\because \begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-4\neq 0$

$\therefore$取$y=0$得 $\begin{cases} x+3z=4 \\ x-z=0 \end{cases}$，　解得 $x=1, z=1$

那么 $(1,0,1)\in l$

故 l 的标准方程为：$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{0}$

3.课堂小结

直线的方程及直线方程如何相互转化

4.布置作业

课本第 120 页习题：3、5

§3.5　直线与平面的相关位置

授课学时：2 学时

一、教学目标

1.掌握直线与平面的相关位置的分类及其判定

2.掌握直线与平面的夹角公式

二、教学重难点

1.教学重点：直线与平面的相关位置的分类及其判定；

2.教学难点：直线与平面的夹角公式。

三、教学方法

多媒体辅助教学、讲练和探究式相结合教学法

四、教学过程

1.导入

有直线，直线和平面有什么样的位置关系呢？

2. 讲解新知

一.（直线与平面相关位置的）种类

1. 相交：有唯一交点

2. 平行：　无交点

3.直线在平面上：有无穷多个交点。

二．判定条件

$$\text{设}\left.\begin{array}{l} l:\dfrac{x-x_0}{X}=\dfrac{y-y_0}{Y}=\dfrac{z-z_0}{Z} \\ \pi: Ax+By+Cz+D=0 \end{array}\right\}\begin{array}{c}(1)\\(2)\end{array} \qquad (*)$$

由定义，讨论l与π的相互位置关系即讨论l与π的交点的存在性和唯一性，亦即讨论方程组（*）的解的存在性和唯一性，以下讨论之。

$$\text{由（1）得}\begin{cases} x=x_0+Xt \\ y=y_0+Yt \\ z=z_0+Zt \end{cases} \qquad (3)$$

将（3）代入（2）得：$(Ax+By+Cz)t=-(Ax_0+By_0+Cz_0+D)$　　（4）

验证易见

t_0为（4）的解$\Leftrightarrow x=x_0+Xt_0, y=y_0+Yt_0, z=z_0+Zt_0$为（*）的解　　（Ⅰ）

（设t_0为（4）的一个解，将t_0代入（3）得$x=x_0+Xt_0, y=y_0+Yt_0, z=z_0+Zt_0$，此为方程组（*）的一个解。反之，设$x=x_0+Xt_0, y=y_0+Yt_0, z=z_0+Zt_0$为（*）的一个

解，将其代入（2）即得 $(Ax+By+Cz)t=-(Ax_0+By_0+Cz_0+D)$ ，即 t_0 为（4）的解）

另外，设 (x,y,z) 是（*）的解，则 (x,y,z) 是（1）的解。因此 $\frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y}=\frac{z-z_0}{Z}\overset{设}{=}t_0$，

则 $x=x_0+Xt_0, y=y_0+Yt_0, z=z_0+Zt_0$ ，即（*）的解具有 $x=x_0+Xt_0, y=y_0+Yt_0, z=z_0+Zt_0$ 的形式（II）

1. l 与 π 相交 $\Leftrightarrow$ l 与 π 有唯一交点 $\Leftrightarrow$ （*）有唯一解 $\Leftrightarrow$ （4）有唯一解 $\Leftrightarrow AX+BY+CZ\neq 0$。

2. $l // \pi \Leftrightarrow l$ 与 π 无交点（*）无解 $\Leftrightarrow$ （4）

$$\Leftrightarrow AX+BY+CZ=0, Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0$$

3. $l\subseteq\pi \Leftrightarrow l$ 与 π 有无数交点 $\Leftrightarrow$ （*）有无数解 $\Leftrightarrow$ （4）有无数解

$$\Leftrightarrow AX+BY+CZ=0, Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$$

综上，我们已证明了如下定理：

Th3.5.1.(P124) 直线（1）与平面（2）的相互位置……。

三.（以下证明一下）在直角坐标系下判定直线与平面相互位置关系的条件的几何意义。

注. $\vec{v}=\{X,Y,Z\}$ 为 l 的一个方向矢量，而在直角坐标系下，π 的一个法矢量为 $\vec{n}=\{A,B,C\}$，故在直角坐标系下，

l 与 π 相交 $\underset{Th3.5.1}{\Leftrightarrow} AX+BY+CZ\neq 0 \Leftrightarrow \vec{n}\bullet\vec{v}\neq 0 \Leftrightarrow \vec{v}$ 与 $\vec{n}$ 不垂直。

l 与 π 平行 $\overset{Th3.5.1}{\Leftrightarrow} AX+BY+CZ=0, Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0$

$\Leftrightarrow \vec{v}\perp\vec{n}$, 且 l 上的点（x_0, y_0, z_0) 不在平面 π 上。

l 在 π 上 $\overset{Th3.5.1}{\Leftrightarrow} AX+BY+CZ=0, Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$

$\Leftrightarrow \vec{v}\perp\vec{n}$ 且，l 上的点 (x_0,y_0,z_0) 在 π 上。

四．直线与平面的交角

我们在直角坐标系下讨论 l 与 π 的交角的求法。用 φ 表示 l 与 π 的交角，当 $l//\pi$ 或 $l\subset\pi$ 时，$\varphi\triangleq 0$；当 $l\perp\pi$ 时，$\varphi\triangleq\frac{\pi}{2}$；否则，$\varphi$ 定义为 l 和 l 在 π 上的射影所构成的锐角（见图）

φ 可由 l 的方向矢量 $\vec{v}=\{X,Y,Z\}$ 和 π 的法矢量 $\vec{n}=\{A,B,C\}$ 来决定。

设$\angle(\vec{n},\vec{v})=\theta(0\le\theta\le\pi)$

则$\varphi=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}-\theta, 0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\\ \theta-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\pi\end{cases}$

因此，$\sin\varphi=\begin{cases}\sin(\dfrac{\pi}{2}-\theta)\\ \sin(\theta-\dfrac{\pi}{2})\end{cases}=\begin{cases}\cos\theta, 0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\\ -\cos\theta, \dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\pi\end{cases}$

$$=\left|\cos\theta\right|=\frac{\left|\vec{n}\bullet\vec{v}\right|}{\left|\vec{n}\right|\left|\vec{v}\right|}=\frac{\left|AX+BY+CZ\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$$

注：$l//\pi$ 或$l\subset\pi\Leftrightarrow\sin\varphi=0\Leftrightarrow AX+BY+CZ=0$

$l\perp\pi\Leftrightarrow\vec{v}//\vec{n}\Leftrightarrow\dfrac{A}{X}=\dfrac{B}{Y}=\dfrac{C}{Z}$

4.课堂小结

直线与平面的三种位置关系，如何判定？直线与平面的夹角如何来求？

4.布置作业

课本第 123 页习题：1,2，3,

§3.6　空间直线与点的相关位置

授课学时：1 学时

一、教学目标

1. 掌握点到直线的距离公式及其推导

二、教学重难点

1.教学重点：点到直线的距离公式；

2.教学难点：点到直线的距离公式的推导。

三、教学方法

多媒体辅助教学、讲练和探究式相结合教学法

四、教学过程

1. 导入

点和直线的位置关系

2. 讲解新知

一．相关位置

P_0与l的相关位置$\begin{cases} P_0 \in l \\ P \notin l \end{cases}$

$P_0 \in l \Leftrightarrow P_0$的坐标满足$l$的方程

二．点到直线的距离

定义 3.6.1（P124）

注：（P124，倒 11 行——倒 9 行）

在空间直角坐标系下，给顼空间一点$M_0(x_0, y_0, z_0)$和直线$l: \dfrac{x-x_1}{X} = \dfrac{y-y_1}{Y} = \dfrac{z-z_1}{Z}$，

$M_0 \notin l$，$M_1(x_1, y_1, z_1)$为l上一点，如图.

$$\left|\bar{v} \times \overline{M_1M_0}\right| = S_{\square} = |\bar{v}| \cdot d\,, \qquad \overline{M_1M_0} = \{x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1\}$$

$$d = \frac{\left|\bar{v} \times \overline{M_1M_0}\right|}{|\bar{v}|} = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_0 - y_1 & z_0 - z_1 \\ Y & Z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_0 - z_1 & x_0 - x_1 \\ Z & X \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_0 - x_1 & y_0 - y_1 \\ X & Y \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}$$

5.课堂小结

直线到平面的距离的计算公式

4.布置作业

课本第 125 页习题：2

§3.7　空间两直线的相关位置

授课学时：2 学时

一、教学目标

1．掌握空间两直线的相关位置的分类及其判定

2．掌握空间两直线的夹角公式

3．掌握两异面直线间的距离公式与公垂线的方程

二、教学重难点

1.教学重点：空间两直线的相关位置的分类及其判定；

2.教学难点：两异面直线间的距离公式与公垂线的方程。

三、教学方法

多媒体辅助教学、讲练和探究式相结合教学法

四、教学过程

1．导入

六种位置关系之一—直线与直线的位置关系

2. 讲解新知

一．分类

$$\text{空间两直线的相关位置}\begin{cases}\text{共面}\begin{cases}\text{相交}\\\text{平行}\\\text{重合}\end{cases}\\ \text{异面}\end{cases}$$

二．判定条件

设 $l_1:\dfrac{x-x_1}{X_1}=\dfrac{y-y_1}{Y_1}=\dfrac{z-z_1}{Z_1}$　　　①

$l_2:\dfrac{x-x_2}{X_2}=\dfrac{y-y_2}{Y_2}=\dfrac{z-z_2}{Z_2}$　　　②

则 $M_1(x_1,y_1,z_1)\in l_1$，$\vec{v}_1=\{X_1,Y_1,Z_1\}$ 为 l_1 的一个方向矢量，

$M_2(x_2,y_2,z_2)\in l_2$，$\vec{v}_2=\{X_2,Y_2,Z_2\}$ 为 l_2 的一个方向矢量

（1）l_1 与 l_2 异面　$\overset{\text{显然}}{\Leftrightarrow}\overline{M_1M_2},\vec{v}_1,\vec{v}_2$ 不共面　$\overset{Th1.5.5}{\Leftrightarrow}\Delta=\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ X_1 & Y_1 & Z_1\\ X_2 & Y_2 & Z_2\end{vmatrix}\neq 0$

（2）l_1 与 l_2 共面　$\overset{\text{（1）的逆否命题}}{\Leftrightarrow}$　$\Delta=0$

（3）l_1与l_2相交$\Leftrightarrow$ l_1与l_2共面且$\vec{v}_1$与$\vec{v}_2$不平行

$$\overset{\text{由（2）和Th1.5.4}}{\Leftrightarrow} \quad \triangle=0, \text{且} X_1:Y_1:Z_1 \neq X_2:Y_2:Z_2$$

（4）$l_1 // l_2 \Leftrightarrow \vec{v}_1$与$\vec{v}_2$共线且$\vec{v}_2$与$\overline{M_1M_2}$不共线

$$\overset{Th1.5.4}{\Leftrightarrow} X_1:Y_1:Z_1 = X_2:Y_2:Z_2 \neq (x_2-x_1):(y_2-y_1):(z_2-z_1)$$

（5）l_1与l_2重合$\Leftrightarrow \vec{v}_1,\vec{v}_2,\overline{M_1M_2}$三者共线

$$\overset{Th1.5.4}{\Leftrightarrow} X_1:Y_1:Z_1 = X_2:Y_2:Z_2 = (x_2-x_1):(y_2-y_1):(z_2-z_1)$$

综上得：

Th3.7.1. 设直线l_1与l_2的方程分别为①，②，令

$$\triangle=(\overline{M_1M_2},\vec{v}_1,\vec{v}_2)=\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix},$$

则

（1） l_1与l_2异面$\Leftrightarrow \triangle \neq 0$

（2） l_1与l_2共面$\Leftrightarrow \triangle = 0$

（3） l_1与l_2相交$\Leftrightarrow \triangle=0, \text{且} X_1:Y_1:Z_1 \neq X_2:Y_2:Z_2$

（4） $l_1 // l_2 \Leftrightarrow X_1:Y_1:Z_1 = X_2:Y_2:Z_2 \neq (x_2-x_1):(y_2-y_1):(z_2-z_1)$

（5） l_1与l_2重合$\Leftrightarrow X_1:Y_1:Z_1 = X_2:Y_2:Z_2 = (x_2-x_1):(y_2-y_1):(z_2-z_1)$

例 求通过点$P(1,1,1)$且与两直线$l_1:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}$, $l_2:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-3}{4}$ 都相交的直线程。

解： 设所求直线l的一个方向矢量为$\vec{v}=\{X,Y,Z\}$，又因为$P(1,1,1)\in l$，那么

$$l:\frac{x-1}{X}=\frac{y-1}{Y}=\frac{z-1}{Z}$$

$\because l$与l_1相交，且$M_1(0,0,0)\in l_1$，$\vec{v}_1=\{1,2,3\}$为l_1的一个方向矢量，$\overline{M_1P}=\{1,1,1\}$

$$\therefore \triangle_1=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ X & Y & Z \end{vmatrix}=0 \text{ 且 } X:Y:Z \neq 1:2:3$$

即 $X-2Y+Z=0$ 且 $X:Y:Z\neq 1:2:3$

$\because l$ 与 l_2 相交，且 $M_2(1,2,3)\in l_2$，$\vec{v}_2=\{2,1,4\}$ 为 l_2 的一个方向矢量，$\overrightarrow{M_2P}=\{0,-1,-2\}$

$\therefore \triangle_2=\begin{vmatrix}0 & -1 & -2\\ 2 & 1 & 4\\ X & Y & Z\end{vmatrix}=0$ 且 $X:Y:Z\neq 2:1:4$

即 $X+2Y-Z=0$ 且 $X:Y:Z\neq 2:1:4$

这样，l 与 l_1,l_2 都相交 $\Leftrightarrow \begin{cases}X-2Y+Z=0\\ X+2Y-Z=0\end{cases}$ 且 $\begin{matrix}X:Y:Z\neq 1:2:3\\ X:Y:Z\neq 2:1:4\end{matrix}$

解之得：$X:Y:Z=\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}1 & -2\\ 1 & 2\end{vmatrix}=0:2:4=0:1:2$

故 $\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{2}$ 为所求。

解法二. 设所求直线为 l，由题意，$P(1,1,1)\in l$，$P_1(0,0,0)\in l_1$，$\vec{v}_1=\{1,2,3\}//l_1$

$P_2(1,2,3)\in l_2$，$\vec{v}_2=\{2,1,4\}//l_2$

设 l_1 与 l 决定的平面为 π_1，则 $\vec{v}_1//\pi_1(\vec{v}_1//l_1,l_1\subset\pi_1)$，$\overrightarrow{P_1P}=\{1,1,1\}//\pi_1(P_1,P\in\pi_1)$

且 $\vec{v}_1$ 与 $\overrightarrow{P_1P}$ 不平行，又 $P_1(0,0,0)\in l_1\subset\pi_1$，故

$\pi_1:\begin{vmatrix}x & y & z\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=0$，即 $x-2y+z=0$

设 l_2 与 l 决定的平面为 π_2，则 $\vec{v}_2//\pi_2(\vec{v}_2//l_2,l_2\subset\pi_2)$，

$\overrightarrow{P_2P}=\{0,-1,-2\}//\pi_2(P_2,P\in\pi_2)$

且 $\vec{v}_2$ 与 $\overrightarrow{P_2P}$ 不平行，又 $P(1,1,1)\in l_2\subset\pi_2$，故

$\pi_2:\begin{vmatrix}x-1 & y-1 & z-1\\ 2 & 1 & 4\\ 0 & -1 & -2\end{vmatrix}=0$，即 $x+2y-z-2=0$

$\because 1:(-2):1\neq 1:2:(-1)$，$\therefore \pi_1$ 与 π_2 相交

$\therefore l$ 为相交平面 π_1 与 π_2 的交线

因此 $l:\begin{cases}x-2y+z=0\\ x+2y-z-2=0\end{cases}$ 为所求（此方程为 l 的一般方程）。

二．空间两直线的夹角

设 $\vec{v}_1,\vec{v}_2$ 分别为空间直线 l_1,l_2 的方向向量 l_1,l_2 的夹角 $\angle(l_1,l_2)\triangleq\angle(\vec{v}_1,\vec{v}_2)$ 或 $\pi-\angle(\vec{v}_1,\vec{v}_2)$

注意：这里 l_1,l_2 为空间中任意两条直线，它们不一定相交。

Th3.7.2. 在直角坐标系下，空间两直线①，②夹角的余弦为

$$\cos\angle(l_1,l_2)=\pm\frac{X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^{\ 2}+Y_1^2+Z_1^2}\sqrt{X_2^{\ 2}+Y_2^{\ 2}+Z_2^{\ 2}}}$$

证：$\cos\angle(l_1,l_2)=\pm\cos\angle(\vec{v}_1,\vec{v}_2)=\pm\dfrac{\vec{v}_1\bullet\vec{v}_2}{|\vec{v}_1||\vec{v}_2|}=\pm\dfrac{X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^{\ 2}+Y_1^2+Z_1^2}\sqrt{X_2^{\ 2}+Y_2^2+Z_2^{\ 2}}}$。

推论：两直线①，②垂直 $\Leftrightarrow X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2=0$

三．两异面直线间的距离与公垂线方程

1.两直线间的距离：两直线上点的最短距离

注. 显然，两相交或重合的直线之间的距离为零。两平行直线间的距离等于其中一条直线上任一点到另一直线的距离（点到直线的距离在下一节讨论）。

2. 两异面直线的公垂线与公垂线的长：与两条异面直线都垂直相交的直线；两个交点间的线段长叫公垂线的长。

注 1^0：异面直线的公垂线存在唯一。

Th3.7.3. 两异面直线间的距离等于它们的公垂线的长。

证：设异面直线 l_1与l_2 的公垂线 l_0 与 l_1和l_2 的交点分别为 Q_1,Q_2。设 M_i为l_i 上任一点，$i=1,2$。

$\vec{v}_1,\vec{v}_2$ 分别为 l_1,l_2 的方向矢量，$\vec{v}_1\times\vec{v}_2$ 为 l_0 的一个方向矢量

$\because l_1\perp l_0$，$\therefore Q_1$ 为 M_1在l_0 上的射影，

则 $\overline{Q_1Q_2}=$ 射影$_{\vec{v}_1\times\vec{v}_2}\overline{M_1M_2}$，因此

$$\left|\overline{Q_1Q_2}\right|=\left|\text{射影}_{\vec{v}_1\times\vec{v}_2}\overline{M_1M_2}\right|=\left|\left|\overline{M_1M_2}\right|\cos\angle(\vec{v}_1\times\vec{v}_2,\overline{M_1M_2})\right|\le\left|\overline{M_1M_2}\right|$$

故 $\left|\overline{Q_1Q_2}\right|$ 为 l_1与l_2 上的点之间的最短距离，从而 $d=\left|\overline{Q_1Q_2}\right|$。

3. 两异面直线间的距离公式（在直角坐标系下讨论）

Th3.7.4. 设异面直线

$$l_1:\frac{x-x_1}{X_1}=\frac{y-y_1}{Y_1}=\frac{z-z_1}{Z_1} \qquad ①$$

$$l_2: \frac{x-x_2}{X_2} = \frac{y-y_2}{Y_2} = \frac{z-z_2}{Z_2} \qquad ②$$

则直线①与②之间的距离 $d = \frac{\left|(\overline{M_1M_2}, \vec{v}_1, \vec{v}_2)\right|}{\left|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\right|}$，其中 $\vec{v}_i = \{X_i, Y_i, Z_i\}$为$l_i$ 的一个方向向量，

$M_i = (x_i, y_i, z_i) \in l_i, i = 1,2$.

证：设 l_1, l_2 与它们的公垂线 l_0 分别交于 Q_1, Q_2，则 l_1, l_2 间的距离

$$d = \left|\overline{Q_1Q_2}\right| = \left|\text{射影}_{\vec{v}_1 \times \vec{v}_2} \overline{M_1M_2}\right| \qquad \text{（由 Th3.7.3 的证明知）}$$

而 $(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \bullet \overline{M_1M_2} = \left|(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)\right| \text{射影}_{\vec{v}_1 \times \vec{v}_2} \overline{M_1M_2}$ （据（1.7-2））故

$$d = \left|\frac{(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \bullet \overline{M_1M_2}}{\left|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\right|}\right| = \frac{\left|(\overline{M_1M_2}, \vec{v}_1, \vec{v}_2)\right|}{\left|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\right|}$$

$$= \frac{\left\| \begin{matrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{matrix} \right\|}{\left\| \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{matrix} \right\|} = \frac{\left\| \begin{matrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{matrix} \right\|}{\sqrt{\begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} Z_1 & X_1 \\ Z_2 & X_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}^2}}$$

4. 异面直线的公垂线方程

设有异面直线①，②，令 π_1 为由 l_1 与它们的公垂线 l_0 决定的平面，则 $\vec{v}_1, \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ 为 π_1 的方位矢量，且 $M_1 \in \pi_1$。令 π_1 为由 l_2 与它们的公垂线 l_0 决定的平面，则 $\vec{v}_2, \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ 为 π_2 的方位矢量，且 $M_2 \in \pi_2$。

显然，$l_0 \subset \pi_1 \bigcap \pi_2$。

$\because l_1$与l_2 异面，$\therefore \pi_1$与π_2 相交（否则，π_1与π_2 重合，这样 l_1与l_2 共面，这同 l_1与l_2 异面矛盾）

于是，l_0 为 π_1与π_2 的交线，故

$$l_0: \begin{cases} \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} = 0 & (\pi_1\text{点位式方程}) \\ \begin{vmatrix} x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} = 0 & (\pi_2\text{点位式方程}) \end{cases}$$

其中$\{X,Y,Z\} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} = \{\begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} Z_1 & X_1 \\ Z_2 & X_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}\}$，即为$l_0$的方向矢量。

例 2 已知两直线$l_1: \dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z+1}{0}, l_2: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-1}{0}$，试证明$l_1$与$l_2$为异面直线，并求$l_1$与$l_2$间的距离与它们的公垂线。

解:（1）$M_1(0,0,-1) \in l_1, \vec{v}_1 = \{1,-1,0\}$为$l_1$的一个方向矢量，$M_2(1,1,1) \in l_2, \vec{v}_2 = \{1,1,0\}$为$l_2$的一个方向矢量，$\overrightarrow{M_1M_2} = \{1,1,2\}$.

$\because \triangle = \left|(\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{v}_1, \vec{v}_2)\right| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$，$\therefore$ l_1与l_2为异面直线。

（2）$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \{\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\} = \{0,0,2\}$

$$d = \frac{\left|(\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{v}_1, \vec{v}_2)\right|}{\left|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\right|} = \frac{4}{2} = 2$$

（3）公垂线l_0的方程为：

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} x & y & z+1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$$ 即$\begin{cases} x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases}$，亦即$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ （它为z轴）

6.课堂小结

直线与直线的四种位置关系，如何判定

公垂线 两直线间的距离

4.布置作业

课本第 131 页习题：1、3、4、5

§3.8 平面束

授课学时：2 学时

一、教学目标

1.掌握有轴平面束的概念及其方程

2.掌握平行平面束的概念及其方程

3.会灵活运用平面束的观点建立平面的方程

二、教学重难点

1.教学重点：空间两直线的相关位置的分类及其判定；

2.教学难点：运用平面束的观点建立平面的方程。

三、教学方法

多媒体辅助教学、讲练和探究式相结合教学法

四、教学过程

1. 导入

两平面形成直线，由直线生成什么样的平面？

2. 讲解新知

一．有轴平面束

1. 定义　空间中通过同一直线的所有平面的集合叫做有轴平面束。那条直线叫做平面束的轴。

2. 有轴平面束的方程

Th3.8.1. 若两个平面

$$\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \qquad ①$$

$$\pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \qquad ②$$

交于一直线l，则以l为轴的有轴平面束的方程是：

$$l(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+m(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0 \qquad (3.8\text{-}1)$$

其中，l,m是不全为零的任意实数。

注. Th3.8.1 的意思是（3.8-1）表示以l为轴的有轴平面束的中的全体平面。

证:（1）证明对任意一对取定的不全为零的实数$l=l_0, m=m_0$，

$$l_0(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+m_0(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0 \qquad (*)$$

表示以l为轴的有轴平面束的一个平面。将（*）改写为：

$$(l_0A_1+m_0A_2)x+(l_0B_1+m_0B_2)y+(l_0C_1+m_0C_2)z+(l_0D_1+m_0D_2)=0 \qquad (**)$$

$\because \pi_1$与π_2相交，$\therefore A_1:B_1:C_1 \neq A_2:B_2:C_2$　③

因此(**)中的系数$l_0A_1+m_0A_2$,$l_0B_1+m_0B_2$,$l_0C_1+m_0C_2$不全为零(否则与③矛盾)，从而(**)是一个关于x,y,z的一次方程,故它表示一个平面. 因（*）与（**）同解，故（*）表示一个平面π。

（再证（*）表示以l为轴的有轴平面束中的一个平面）

$\because l$为π_1与π_2的交线

$\therefore l$上的点的坐标同时满足方程①，②，从而也满足（*）

那么$l\subset\pi$，即π过l（亦即π为以l为轴的平面束中的一个平面），这样，(*) 表示以l为轴的有轴平面束中的任意一个平面π。

（2）证明对以l为轴的平面束中的任意一个平面π，我们都能确定l,m，使π的方程为（3.8-1）的形式.

取$P(x_0,y_0,z_0)\in\pi$且$P\notin l$。

先证在（3.8-1）表示的平面的集合$\sum$ 中有一个平面π_0过$P(x_0,y_0,z_0)$。

存在$\pi_0\in\sum$使 $P\in\pi_0\Leftrightarrow\exists$不全为零的$l_0,m_0$，使

$$l_0(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+m_0(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$$

$\Leftrightarrow$ $\exists$ 不全为零的 l_0,m_0，使 $l_0:m_0=(A_2x+B_2y+C_2z+D_2):[-(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)]$

$\because P\notin l$，则 $A_2x+B_2y+C_2z+D_2$，$A_1x+B_1y+C_1z+D_1$ 不全为零（否则，$P\in\pi_1\bigcap\pi_2=l$，与$P\notin l$矛盾）

$\therefore\exists$不全为零的l_0,m_0,使$l_0:m_0=(A_2x+B_2y+C_2z+D_2):[-(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)]$，从而存在$\pi_0\in\sum$使 $P\in\pi_0$，

$$\pi_0:l_0(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+m_0(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$$

（再证π的方程具有（3.8-1）的形式）

由（1）的证明可知$\sum$中的平面π_0过l，这样π和π_0都过l和P

$\because$过l和P的平面是唯一的

$\therefore\pi=\pi_0$

因此π的方程为：$l_0(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+m_0(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$，具有（3.8-1）的形式。

例 1．求通过直线$\begin{cases}2x+y-2z+1=0\\ x+2y-z-2=0\end{cases}$且与平面$x+y+z-1=0$垂直的平面方程.

解. 设所求平面方程为：$l(2x+y-2z+1=0)+m(x+2y-z-2=0)=0$

即$(2l+m)x+(l+2m)y+(-2l-m)z+(l-2m)=0$.

$\because$所求平面π与平面$x+y+z-1=0$垂直，从而两者的法矢垂直，

$\therefore (2l+m)\bullet 1+(l+2m)\bullet 1+(-2l-m)\bullet 1=0$ ，

即$l+2m=0$，取$l=2$得$m=-1$

所求平面方程为：$2(2x+y-2z+1=0)-(x+2y-z-2=0)=0$ ，即$3x-3z+4=0$.

例 3 试证两直线

$$l_1:\begin{cases}\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\ \pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$$

$$l_2:\begin{cases}\pi_3: A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0\\ \pi_4: A_4x+B_4y+C_4z+D_4=0\end{cases}$$

在同一平面上的充要条件是

$$\begin{vmatrix}A_1 & B_1 & C_1 & D_1\\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2\\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3\\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4\end{vmatrix}=0.$$

证： l_1与l_2共面于$\Leftrightarrow\pi$过l_1且π过l_2

$\Leftrightarrow\pi$为以l_1为轴的平面束中的一个平面，同时π也是以l_2为轴的平面束中的一个平面

$\Leftrightarrow$存在不全为零的λ_1,λ_2，使π的方程为：

$$\lambda_1(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\lambda_2(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0 \qquad （Ⅰ）$$

存在不全为零的λ_3,λ_4，使π的方程为：

$$\lambda_3(A_3x+B_3y+C_3z+D_3)+\lambda_4(A_4x+B_4y+C_4z+D_4)=0 \qquad （Ⅱ）$$

$\Leftrightarrow$存在不全为零的λ_1,λ_2与λ_3,λ_4，使平面（Ⅰ）与（Ⅱ）重合

$\Leftrightarrow$存在不全为零的λ_1,λ_2与λ_3,λ_4，使（（Ⅰ）与（Ⅱ）中的x,y,z的系数及常数项对

应成比例，设比为m，即）

$$\begin{cases} \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 - m\lambda_3 A_3 - m\lambda_4 A_4 = 0 \\ \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 - m\lambda_3 B_3 - m\lambda_4 B_4 = 0 \\ \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 - m\lambda_3 C_3 - m\lambda_4 C_4 = 0 \\ \lambda_1 D_1 + \lambda_2 D_2 - m\lambda_3 D_3 - m\lambda_4 D_4 = 0 \end{cases} \qquad (m \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A_1 x + A_2 y - mA_3 z - mA_4 w = 0 \\ B_1 x + B_2 y - mB_3 z - mB_4 w = 0 \\ C_1 x + C_2 y - mC_3 z - mC_4 w = 0 \\ D_1 x + D_2 y - mD_3 z - mD_4 w = 0 \end{cases} \quad \text{存在非零解}$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & -mA_3 & -mA_4 \\ B_1 & B_2 & -mB_3 & -mB_4 \\ C_1 & C_2 & -mC_3 & -mC_4 \\ D_1 & D_2 & -mD_3 & -mD_4 \end{vmatrix} = 0 \quad \overset{m\neq 0}{\Leftrightarrow} \quad \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \\ D_1 & D_2 & D_3 & D_4 \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix} = 0$$

二．平行平面束

1. 定义 空间中平行于同一平面的所有平面的集合叫做平行平面束

2. 平行平面束的方程

Th3.8.2. 若两个平面$\pi_1 : A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$，$\pi_2 : A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$

为平行平面（$A_1 : B_1 : C_1 = A_2 : B_2 : C_2$），则方程：

$$l(A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1) + m(A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2) = 0 \qquad ⑦$$

表示平行平面束，平面束里任何一个平面都和π_1或π_2平行，其中l, m是不全为零的任意实数，且$-m : l \neq A_1 : A_2 = B_1 : B_2 = C_1 : C_2$。

此定理的证明方法与 Th3.8.1 的证明类似，故略

推论 由平面$\pi : Ax + By + Cz + D = 0$决定的平面束（即与平面$\pi$平行的全体平面）的方程为：$Ax + By + Cz + \lambda = 0$，其中$\lambda$是任意实数（当$\lambda$取定一个值时，就表示与$\pi$平行的一个平面）

例 2. 求与平面$3x + y - z + 4 = 0$平行且在oz轴上的截距等于-2 的平面方程.

解. $\because$所求平面π与平面$3x + y - z + 4 = 0$平行（即为由平面$3x + y - z + 4 = 0$所决

定的平行平面束中的一个平面）

$\therefore$ 可设 π 的方程为：$3x+y-z+\lambda=0$，λ 为实数.

$\because$ π 在 oz 轴上的截距等于-2，　$\therefore$ π 过点 $(0,0,-2)$.

由此得：　$2+\lambda=0, \lambda=-2$，故 π 的方程为：$3x+y-z-2=0$.

7.课堂小结

有轴平面束和平行平面束的方程，会用平面束解决问题

4.布置作业

课本第 137 页习题：1、5