第 5 章　二次曲线的一般理论

§5.1　二次曲线与直线的相关位置

授课学时：2 学时

一、教学目标

掌握二次曲线与直线的相关位置的判定。

二、教学重难点

1.教学重点：二次曲线与直线的相关位置；

2.教学难点：二次曲线与直线的相关位置。

三、教学方法

多媒体辅助教学、讲练和探究式相结合教学法

四、教学过程

1.导入

最简单的曲线——直线，稍微复杂一点的——二次曲线

2.讲解新知

1.二次曲线的定义：在平面上，由二元二次方程

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0 \qquad ①$$

表示的曲线，叫做二次曲线。

注：方程①中的系数都带上 2 是为了以后演算方便。

注：由二次曲线的定义，二次曲线的方程①中的 a_{11},a_{12},a_{22} 不全为零。否则①不是二次方程

这一章，将讨论二次曲线的几何性质，以及二次曲线的一般方程的化简，最后对二次曲线进行分类。

我们将从研究直线与二次曲线的相交问题入手，来认识二次曲线的某些几何性质。为了求直线与二次曲线的交点，就必然涉及到解二次方程的问题，但是二次方程的根可能是虚数（形如 $a+bi$ 的数），为了在讨论问题是不受限制，在这里我们将象代数中引进虚数把实数扩充成复数那样，在平面上引进虚点。下面，我们简单的证明一下有关虚点的问题。

2. 复点：

当平面上建立了笛卡尔坐标系之后，一对有序实数 (x,y) 就表示平面上的一个点，若 x 及 y 中至少有一个是虚数（形如 $x+yi$，且 $y\neq0$），那么，在这里我

们仍认为(x,y)表示平面上的一个点。这样的点，我们把它叫做平面上的虚点。而x，y叫做这一虚点的坐标，相应地，我们把坐标是一对实数的点叫做平面上的实点。若两个虚点的对应坐标都是共轭复数，则这两点叫做一对共轭虚点。实点与虚点统称为复点

当平面上引进了虚点之后，我们仍可以讨论向量、直线等概念。

3. 复向量

设$M_1(x_1,y_1),M_2(x_2,y_2)$为平面上的两复点，称$\overrightarrow{M_1M_2}\triangleq\{x_2-x_1,y_2-y_1\}$为以$M_1$为起点，$M_2$为终点的复向量，若$x_2-x_1$与$y_2-y_1$中至少有一为虚数时，称其为虚向量。

4. 实直线与虚直线

设$M_1(x_1,y_1),M_2(x_2,y_2)$为复点，称$\begin{cases}x=x_1+(x_2-x_1)t\\ y=y_1+(y_2-y_1)t\end{cases}$为由两点$M_1(x_1,y_1),M_2(x_2,y_2)$决定的直线的参数方程，式中$t$为参数，它可取任意的复数。消去参数$t$得$Ax+By+c=0$，其中$A=y_2-y_1$，$B=-(x_2-x_1)$，$C=y_1(x_2-x_1)-x_1(y_2-y_1)$。方程$Ax+By+C=0$叫做直线的一般方程。

若A,B,C与三个实数成比例，则直线叫实直线，否则叫虚直线。

5. 复点的定比分点及其坐标公式

设$M_1(x_1,y_1),M_2(x_2,y_2)$为复点，若复点$M(x,y)$的坐标满足$x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$，$y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$，其中$\lambda$为复数，我们就称$M$分$M_1M_2$成定比$\lambda$。

特别地把点$M(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2})$叫做$M_1M_2$的中点。

注：由于共轭复数之和为实数，所以连接两共轭虚点的线段的中点是实点。

注：平面上引进虚点之后，曲线的方程中可能会出现虚分数，不过以后我们讨论的时候，只考虑实分数的曲线方程，但是，由于引进了虚点，实分数方程所表示的曲线上将含有许多虚点，甚至有的实分数方程所表示的曲线上只有虚点而无实点。

6. 常用记号

(1) $F(x,y)\triangleq a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}$

这样方程(1)可写为$F(x,y)=0$

$$F(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}$$

$$=(a_{11}x^2+a_{12}xy+a_{13}x)+(a_{12}xy+a_{22}y^2+a_{23}y)+(a_{13}x+a_{23}y+a_{33})$$

$$=x(a_{11}x+a_{12}y+a_{13})+y(a_{12}x+a_{22}y+a_{23})+a_{13}x+a_{23}y+a_{33}$$

(2) $F_1(x,y)\triangleq a_{11}x+a_{12}y+a_{13}$

(3) $F_2(x,y)\triangleq a_{12}x+a_{22}y+a_{23}$

(4) $F_3(x,y)\triangleq a_{13}x+a_{23}y+a_{33}$

故$F(x,y)\equiv xF_1(x,y)+yF_2(x,y)+F_3(x,y)$

(5) $\Phi(x,y)\triangleq a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2$

(6) 二次曲线(1)的矩阵（或称$F(x,y)$的矩阵）：$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$

注：二次曲线(1)的矩阵的第一、二、三行分别为$F_1(x,y),F_2(x,y),F_3(x,y)$的系数

(7) $\Phi(\mathrm{x},y)$的矩阵：$A^*=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$

(8) $I_1\triangleq a_{11}+a_{22}$，$I_2\triangleq\left|A^*\right|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$，$I_3\triangleq|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$

(9) $K_1\triangleq\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$

§5.1 二次曲线与直线的相关位置

设有二次曲线Γ $F(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}$ ①，过点(x_0,y_0)且具有方向$X:Y$的直线l（这里x_0,y_0 X,Y均为实数）：$\begin{cases} x=x_0+Xt \\ y=y_0+Yt \end{cases}$ ②

讨论Γ与l的交点，为此把②代入①，整理得关于t的方程：

$$(a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2)t^2+2\{(a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{13})x+(a_{12}x_0+a_{12}y_0+a_{23})y\}t+$$

$$+$$

$$(a_{11}x_0{}^2+2a_{12}x_0y_0+a_{22}y_0{}^2+2a_{13}x_0+2a_{23}y_0+a_{33})=0.$$

利用前面的记号，上式可写成：

$$\Phi(x,y)t^2+2[F_1(x_0,y_0)x+F_2(x_0,y_0)y]t+F(x_0,y_0)=0 \qquad ④$$

1. $\Phi(x,y)\neq 0$

此时④是关于t的二次方程，其判别式为：

$$\Delta=[F_1(x_0,y_0)x+F_2(x_0,y_0)y]^2-\Phi(x,y)\cdot F(x_0,y_0)$$

1^0 $\Delta>0$时，④有两个不等的实根t_1与t_2，将其带入②便得l与Γ的两个不同的实交点。

2^0 $\Delta=0$时，④有两个相等的实根t_1与t_2，此时l与Γ有两个相互重合的实交点。

3^0 $\Delta<0$时，方程④有两个共轭的复根，此时l与Γ交于两个共轭的虚点。

2. $\Phi(x,y)=0$

1^0 $F_1(x_0,y_0)x+F_2(x_0,y_0)y\neq 0$。此时④是关于$t$的一次方程。它有唯一的一个实根，，因此，$l$与$\Gamma$有唯一的实交点。

例如：抛物线$y^2-2px=0$与直线$y=2$。$a_{22}=1,a_{13}=-p,a_{11}=a_{12}=a_{23}=a_{33}=0$； $y=2$的方向为$1:0$，过点$(0,2)$。

$$\Phi(1,0)=(a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2)\Big|_{\substack{x=1\\y=0}}=0\cdot1^2+2\cdot0\cdot1\cdot0+0\cdot0^2=0$$

$$F_1(0,2)=(a_{11}x+a_{12}y+a_{13})\Big|_{\substack{x=0\\y=2}}=0\cdot0+0\cdot2+(-p)=-p$$

$$F_2(0,2)=(a_{12}x+a_{22}y+a_{23})\Big|_{\substack{x=0\\y=2}}=0\cdot0+1\cdot2+0=2$$

$$F_1(0,2)\cdot1+F_2(0,2)\cdot0=-p\neq0$$

因此，$y=2$与$y^2-2px=0$交于一点。

2^0 $F_1(x_0,y_0)x+F_2(x_0,y_0)y=0$且$F(x_0,y_0)\neq0$。这时④无解，因此$l$与$\Gamma$没有交点。

例如：双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$与它的渐近线$\frac{x}{a}\pm\frac{y}{b}=0$就是这种情况，它们没有交

点。

3^0 $F_1(x_0,y_0)x+F_2(x_0,y_0)y=F(x_0,y_0)=0$ 。此时④是关于t的恒等式，即它被任何的t（实的或虚的）所满足，因此，l上的一切点都是l与Γ的公共点。即l全部在Γ上。

例如：直线$x+y=0$或$x-y=0$就全部在二次曲线$x^2-y^2=0$上。

4. 课堂小结

二次曲线与直线的多种位置关系如何判定

6.布置作业

课本第 191 页习题：2、4

§ 5.2　二次曲线的渐近方向、中心、渐近线

授课学时：2 学时

一、教学目标

1．二次曲线的渐近方向、中心、渐近线的概念及求法。

2．掌握二次曲线的分类。

二、教学重难点

1.教学重点：二次曲线的渐近方向、中心、渐近线的概念及求法；

2.教学难点：关于二次曲线的渐近方向、中心、渐近线的讨论。

三、教学方法

多媒体辅助教学、讲练和探究式相结合教学法

四、教学过程

1.导入

跟二次曲线密切相关的特殊直线—渐近线

2. 讲解新知

一、　渐近方向

设二次曲线Γ：$F(x,y)=0$　①，直线l：$\begin{cases} x = x_0 + Xt \\ y = y_0 + Yt \end{cases}$　②（其具有方向$X:Y$）．由 § 5.1 知 当$\Phi(X,Y)=0$时，l与p或者只有一个实交点；或者没有交点，或者l全部在p上。

1. 定义：满足$\Phi(X,Y)=0$的方向$X:Y$叫做二次曲线①的渐近方向。否则叫做非渐近方向

2. 关于二次曲线①的渐近方向的讨论

显然①的二次项系数不能全为零。(否则①就不是二次曲线了）设$X:Y$为二次曲线①的渐近方向，则　$\Phi(X,Y)=a_{11}X^2+2a_{12}XY+a_{22}Y^2=0$　③

(1) 若$a_{11}\neq 0$，将③改写为：$a_{11}(\frac{X}{Y})^2+2a_{12}\frac{X}{Y}+a_{22}=0$．（由$\Phi(X,Y)=0$和$a_{11}\neq 0$可知$Y\neq 0$。否则$a_{11}X^2=0$，由$X,Y$不全为零知$X\neq 0$，从而$a_{11}=0$矛盾)，则得：

$$\frac{X}{Y}=\frac{-a_{12}\pm\sqrt{a_{12}{}^2-a_{11}a_{22}}}{a_{11}}=\frac{-a_{12}\pm\sqrt{-I_2}}{a_{11}}\qquad (*)$$

(2)若 $a_{22}\neq 0$，把③改写为：$a_{22}(\frac{Y}{X})^2+2a_{12}\frac{Y}{X}+a_{11}=0$ (**) （由 $\Phi(X,Y)=0$ 和 $a_{22}\neq 0$ 可推知 $X\neq 0$），则得：

$$\frac{Y}{X}=\frac{-a_{12}\pm\sqrt{a_{12}{}^2-a_{11}a_{22}}}{a_{22}}=\frac{-a_{12}\pm\sqrt{-I_2}}{a_{22}}$$

(3)若 $a_{11}=a_{22}=0$，则 $a_{12}\neq 0$（二次曲线方程中 a_{11},a_{12},a_{22} 不全为零），此时③成为：$2a_{12}XY=0$

因此 $XY=0$。 $X:Y=1:0$ 或 $0:1$（方向数不全为零），这时

$$I_2=\begin{vmatrix}0 & a_{12}\\ a_{12} & 0\end{vmatrix}=-a_{12}{}^2<0 \qquad (***)$$

从以上讨论可见：$I_2>0\Leftrightarrow$ 二次曲线①有一对共轭的虚渐近方向；$I_2=0\Leftrightarrow$ ①有一个实渐近方向；$I_2<0\Leftrightarrow$ ①有两个实渐近方向。

注：由以上讨论可见，二次曲线的渐近方向最多有两个。显然二次曲线的非渐近方向有无数个。（任一不是渐近方向的方向都为非渐近方向）

例如：(1) 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$。因为 $I_2=\begin{vmatrix}\frac{1}{a^2} & 0\\ 0 & \frac{1}{b^2}\end{vmatrix}=\frac{1}{a^2b^2}>0$，所以该椭圆有一对共轭的虚渐近方向。解 $\Phi(X,Y)=\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=0$ 得 $\frac{X}{Y}=\pm\frac{a}{b}i$. 这就是椭圆的一对共轭的虚渐近方向。

(2) 对于抛物线 $y^2=2px$，有 $I_2=\begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=0$. 解 $\Phi(X,Y)=Y^2=0$ 得 $X:Y=1:0$，这是一个实渐近方向

(3) 对于双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，有 $I_2=-\frac{1}{a^2b^2}<0$. 解 $\Phi(X,Y)=\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=0$ 得 $\frac{X}{Y}=\pm\frac{a}{b}$ 这是一对实渐近方向。这恰为双曲线的两条渐近线的方向。

1. 二次曲线按渐近线方向的分类

定义 没有实渐近方向的二次曲线叫椭圆型的，有一个实渐近方向的二次曲

线叫抛物型的；有两个实渐近方向的二次曲线叫双曲型的。

由以上定义及讨论，可知二次曲线按其渐近线方向可分为三类：

⑴椭圆型曲线：$I_2>0$

⑵抛物型曲线：$I_2=0$

⑶双曲型曲线：$I_2<0$

二、二次曲线的中心

设二次曲线$\Gamma:F(x,y)=0$ ①， 直线$l:\begin{cases}x=x_0+Xt\\ y=y_0+Yt\end{cases}$ ②. 由§5.1知 当直线②的方向$X:Y$为二次曲线①的非渐近方向时，即当$\Phi(X,Y)=a_{11}X^2+2a_{12}XY+a_{22}Y^2\neq0$时，直线②与二次曲线①总交于两点（两不同实的，两重合实的或一对共轭虚的）。我们把由这两点决定的线段叫做二次曲线的弦。

1. 定义 若点C是二次曲线的通过它的所有弦的中点(因而C是二次曲线的对称中心)，则

C称为二次曲线的中心（例如 圆的圆心为它的中心）

2. 二次曲线的中心的判定及求法

定理 5.2.1 点$C(x_0,y_0)$是二次曲线①的中心

$$\Leftrightarrow\begin{cases}F_1(x_0,y_0)=a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{13}=0\\ F_2(x_0,y_0)=a_{12}x_0+a_{22}y_0+a_{23}=0\end{cases}\qquad(5.2.1)$$

证：过点$C(x_0,y_0)$以①的任意非渐近方向$X:Y$为方向的直线②与①的两个交点为$M_1(x_1,y_1),M_2(x_2,y_2)$（$M_1,M_2$可能为虚点）。设$M_1,M_2$对应的参数为$t_1,t_2$（可能为虚数）。则有

$$\begin{cases}x_i=x_0+Xt_i\\ y_i=y_0+Yt_i\end{cases}\quad i=1,2\qquad③$$

$\Rightarrow$设$C(x_0,y_0)$为①的中心。则由定义C为弦M_1M_2的中点，故有

$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y_0=\frac{y_1+y_2}{2}\qquad④$$

将③带入④得：$2x_0=2x_0+X(t_1+t_2)$，$2y_0=2y_0+Y(t_1+t_2)$. 于是有 $X(t_1+t_2)=0$，$Y(t_1+t_2)=0$. 又因 X,Y 不全为零，所以 $t_1+t_2=0$. 因为 $M_i(i=1,2)$ 为①与②的交点，所以由§5.1的讨论知 M_1,M_2 对应的参数 t_1,t_2 为方程

$$\Phi(X,Y)t^2+2[F_1(x_0,y_0)X+F_2(x_0,y_0)Y]t+F(x_0,y_0)=0 \quad (*)$$

的根。由韦达定理（根与系数的关系）知：

$$\frac{-2}{\Phi(X,Y)}[F_1(x_0,y_0)X+F_2(x_0,y_0)Y]=t_1+t_2=0 \qquad (**)$$

因此 $F_1(x_0,y_0)X+F_2(x_0,y_0)Y=0$. 因为 $X:Y$ 为任意非渐近方向，所以对任意的非渐近方向 $X:Y$ 上式都成立。即上式是关于 X,Y 的恒等式。从而 $F_1(x_0,y_0)=0,F_2(x_0,y_0)=0$。

$\Leftarrow$ 设 $C(x_0,y_0)$ 满足 $\begin{cases}F_1(x_0,y_0)=0\\F_2(x_0,y_0)=0\end{cases}$，则对①的任意非渐近方向 $X:Y$，有⑤式成立. 因此，方程的根 t_1,t_2 即 $M_1(x_1,y_1),M_2(x_2,y_2)$ 对应的参数 t_1,t_2 满足 $t_1+t_2=0$（由 $(**)$ 知）。由此可知 $C(x_0,y_0)$ 为弦 M_1M_2 的中点。故 $C(x_0,y_0)$ 为①的中心。

推论：坐标原点是二次曲线的中心 $\Leftrightarrow$ 曲线方程里不含 x 与 y 的一次项

证：原点为二次曲线的中心 $\Leftrightarrow \begin{cases}F_1(0,0)=0\\F_2(0,0)=0\end{cases} \Leftrightarrow a_{13}=0,a_{23}=0$。

1. 关于二次曲线①的中心的讨论

由定理5.2.1可知二次曲线①的中心的坐标由下列方程所决定

$$\begin{cases}F_1(x,y)=a_{11}x+a_{12}y+a_{13}=0\\F_2(x,y)=a_{12}x+a_{22}y+a_{23}=0\end{cases} \qquad (5.5-2)$$

若 $I_2=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{12}&a_{22}\end{vmatrix}\neq 0$，则 $(5.5-2)$ 有唯一解。此时①有唯一中心，$(5.5-2)$ 的解即为中心的坐标。

若 $I_2=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{12}&a_{22}\end{vmatrix}=0$，即 $\frac{a_{11}}{a_{12}}=\frac{a_{12}}{a_{22}}$。则当 $\frac{a_{11}}{a_{12}}=\frac{a_{12}}{a_{22}}\neq\frac{a_{13}}{a_{23}}$ 时 $(5.5-2)$ 无解，（因为此时，$(5.5-2)$ 的系数矩阵的秩为 1，增广矩阵的秩为 2）①没有中心；而

当 $\frac{a_{11}}{a_{12}}=\frac{a_{12}}{a_{22}}=\frac{a_{13}}{a_{23}}$ 时， $(5.5-2)$ 有无数个解。这时直线 $a_{11}x+a_{12}y+a_{13}=0$ （或 $a_{12}x+a_{22}y+a_{23}=0$ ）上的所有的点都是二次曲线①的中心。这条直线叫做中心直线。

2. 二次曲线①按其中心的分类

定义 5.2.4 有唯一中心的二次曲线叫中心二次曲线，没有中心的二次曲线叫无心二次曲线，有一条中心直线的二次曲线叫做线心二次曲线，无心二次曲线与线心二次曲线统称为非中心二次曲线。

据以上定义，二次曲线①可分为：

(1) 中心曲线： $I_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}\neq 0$ 。

(2)非中心曲线： 即 $\frac{a_{11}}{a_{12}}=\frac{a_{12}}{a_{22}}$

1^0 无心曲线 $\frac{a_{11}}{a_{12}}=\frac{a_{12}}{a_{22}}\neq\frac{a_{13}}{a_{23}}$

2^0 线心曲线 $\frac{a_{11}}{a_{12}}=\frac{a_{12}}{a_{22}}=\frac{a_{13}}{a_{23}}$

注：从二次曲线按渐近线方向与按中心初步分类中，易见，椭圆型曲线 $(I_2>0)$ 与双曲线型曲线 $(I_2<0)$ 都是中心曲线，而抛物型曲线 $(I_2=0)$ 是非中心型曲线。它包括无心曲线与线心曲线。

三、二次曲线的渐近线

1. 定义 过二次曲线的中心，而且以渐近方向为方向的直线叫做该二次曲线的渐近线。

注：因为椭圆型曲线是中心曲线且只有一对共轭的虚渐近方向，故该类曲线只有两条虚渐近线而无实渐近线。

类似的，双曲型曲线有两条实渐近线；而抛物型曲线中的无心曲线无渐近线（因为无中心）；至于抛物型曲线中的线心曲线，它有中心且有一实渐近方向，故它有一实渐近线，就是它的中心直线（因为渐近线过中心）

2. 渐近线的性质

定理 5.2.2：二次曲线的渐近线与这二次曲线或者没有交点，或者整体直线在这二次曲线上，或为二次曲线的组成部分。

证：设直线②是二次曲线①的渐近线，这里 (x_0,y_0) 为二次曲线①的中心， $X:Y$ 为①的渐近方向。则 $F_1(x_0,y_0)=F_2(x_0,y_0)=0 \quad (Th5.2.1)$， $\Phi(X,Y)=0$（渐近方向的定义）．由§5.1 中直线与二次曲线的相交特点的讨论知，点 (x_0,y_0) 不在曲线

①上时。即时，由$\Phi(X,Y)=0$，$F_1(x_0,y_0)X+F_2(x_0,y_0)Y=0$，$F(x_0,y_0)\neq 0$知渐近线②与二次曲线①没有交点；当点$(x_0,y_0)$在二次曲线①上时。即$F(x_0,y_0)=0$时，由$\Phi(X,Y)=0$，$F_1(x_0,y_0)X+F_2(x_0,y_0)Y=F(x_0,y_0)=0$知渐近线②全部在二次曲线①上成为二次曲线①的组成部分。

例　已知$\Gamma: F(x,y)=x^2-3xy+2y^2+x-3y+4=0$，

(1) 判断Γ的类型.

(2) Γ的渐近方向.

(3) 求Γ的中心.

(4) 求Γ的渐近线.

解：Γ的矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & 2 & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 4 \end{pmatrix}$

(1)因为$I_2=\begin{vmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 2 \end{vmatrix}=2-\frac{9}{4}=-\frac{1}{4}<0$，所以，$\Gamma$为双曲型、中心曲线。

(2) $\Phi(X,Y)=x^2-3xy+2y^2=0$，$(x-y)(x-2y)=0$渐近方向为$X:Y=1:1$或$X:Y=2:1$

(3)$\begin{cases} F_1(x,y)=x-\frac{3}{2}y+\frac{1}{2}=0 \\ F_2(x,y)=-\frac{3}{2}x+2y-\frac{3}{2}=0 \end{cases}$　解之得中心为$(-5,-3)$

(4) 渐近线为$\frac{x+5}{1}=\frac{y+3}{1}$ 或$\frac{x+5}{2}=\frac{y+3}{1}$,即 $x-y+2=0$ 或$x-2y-1=0$.

3.课堂小结

二次曲线的渐近方向与中心，及渐近线

4.布置作业

课本第 195 页习题：1,2,3，　6

§ 5.3　二次曲线的切线

授课学时：2 学时

一、　教学目标

1. 二次曲线的切线的定义
2. 二次曲线的切线的求法

二、教学重难点

1.教学重点：二次曲线的切线的求法；

2.教学难点：二次曲线切线的讨论。

三、教学方法

多媒体辅助教学、讲练和探究式相结合教学法

四、教学过程

1. 导入

跟二次曲线密切相关的直线　切线

2. 讲解新知

一、 概念

1. 二次曲线的切线：若直线与二次曲线相交于相互重合的两个点。则这直线叫做二次曲线的切线，这个重合的交点叫做切点。若直线全部在二次曲线上。我们也称它为二次曲线的切线，直线上的每个点都可看成切点。

2. 二次曲线的奇点与正常点：二次曲线 $F(x,y)=0$ 上的满足条件 $F_1(x_0,y_0)=F_2(x_0,y_0)=0$ 的点 (x_0,y_0) 叫做二次曲线的奇异点，简称为奇点。二次曲线的非奇异点叫做二次曲线的正常点。

注：由定义，要求 $\Gamma:F(x,y)=0$ 的奇点，只需求 $\begin{cases}F_1(x,y)=0\\F_2(x,y)=0\\F(x,y)=0\end{cases}$ 的解.

二、 切线的存在性及切线的方程

设 $\Gamma:F(x,y)=0,(x_0,y_0)\in\Gamma$ ，　$l:\begin{cases}x=x_0+Xt\\y=y_0+Yt\end{cases}$. 由 § 5.1 的讨论知：

当 $\Phi(x,y)\neq 0$ 时，l 为 Γ 的过点 (x_0,y_0) 的切线 $\Leftrightarrow$ l 与 Γ 有两个相互重合的实交点

$$\Leftrightarrow \Delta=0 \Leftrightarrow [XF_1(x_0,y_0)+YF_2(x_0,y_0)]^2-\Phi(X,Y)F(x_0,y_0)=0$$

$$\Leftrightarrow XF_1(x_0,y_0)+YF_2(x_0,y_0)=0$$

当$\Phi(x,y)=0$时，（此时有三种情形：l与Γ有唯一实交点；无交点；$l\subseteq\Gamma$）l为Γ的过点(x_0,y_0)的切线$\Leftrightarrow$ l 全部在Γ上$\Leftrightarrow$ $XF_1(x_0,y_0)+YF_2(x_0,y_0)=F(x_0,y_0)=0$

$$\Leftrightarrow XF_1(x_0,y_0)+YF_2(x_0,y_0)=0.$$

综上，l为Γ的过点(x_0,y_0)的切线$\Leftrightarrow$ l 的方向$X:Y$满足$XF_1(x_0,y_0)+YF_2(x_0,y_0)=0$（5.3—2）

若$F_1(x_0,y_0)$与$F_2(x_0,y_0)$不全为零，则由（5.3—2）得：$X:Y=F_2(x_0,y_0)$：（—$F_1(x_0,y_0)$）

此时，Γ的过点(x_0,y_0)的切线方程为$\begin{cases}x=x_0+F_2(x_0,y_0)t\\ y=y_0-F_1(x_0,y_0)t\end{cases}$，或写成

$$\frac{x-x_0}{F_2(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{-F_1(x_0,y_0)},$$

或
$$(x-x_0)F_1(x_0,y_0)+(y-y_0)F_2(x_0,y_0)=0 \qquad (5.3—3)$$

若$F_1(x_0,y_0)=F_2(x_0,y_0)=0$，则(5.3—2)变为关于$X,Y$的恒等式。此时，任一方向$X:Y$都满足（5.3—2），从而过$(x_0,y_0)$的一切直线都是$\Gamma$的过点$(x_0,y_0)$的切线。

综上可知，二次曲线的过该二次曲线上任意点(x_0,y_0)的切线存在且得到如下定理：

定理 5.3.1 若(x_0,y_0)是二次曲线①的正常点，则①的过点(x_0,y_0)的切线方程为（5.3—3），若(x_0,y_0)是①的奇异点，则过点(x_0,y_0)的每一条直线都是①的切线

推论 若(x_0,y_0)是二次曲线①的正常点，则①的通过(x_0,y_0)的切线方程是：

$$a_{11}x_0x+a_{12}(x_0y+xy_0)+a_{22}y_0y+a_{13}(x+x_0)+a_{23}(y+y_0)+a_{33}=0 \qquad (5.3—4)$$

证：把（5.3—3）改写为

$$xF_1(x_0,y_0)+yF_2(x_0,y_0)-[x_0F_1(x_0,y_0)+y_0F_2(x_0,y_0)]=0 \qquad (*)$$

因为$x_0F_1(x_0,y_0)+y_0F_2(x_0,y_0)+F_3(x_0,y_0)=F(x_0,y_0)=0$

所以 $F_3(x_0,y_0)=-[x_0F_1(x_0,y_0)+y_0F_2(x_0,y_0)]$

从而$(*)$又可写为：$xF_1(x_0,y_0)+yF_2(x_0,y_0)+F_3(x_0,y_0)=0$

即：$x(a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{13})+y(a_{12}x_0+a_{22}y_0x+a_{23})+(a_{13}x+a_{23}y+a_{33})=0$

由此即得（5.3—4）

注：公式（5.3—4 便于记忆，记忆的方法是把原方程①写成

$$a_{11}xx+a_{12}(xy+xy)+a_{22}yy+a_{13}(x+x)+a_{23}(y+y)+a_{33}=0$$

然后每一项中一个 x 或 y 用 x_0 或 y_0 带入即得（5.3—4）

例 1：（P_{196}）让同学自己看。

例 2：求二次曲线 $\Gamma: x^2-xy+y^2-1=0$ 通过点 $(0,2)$ 的切线方程.

解法一、因为 $F(0,2)=(x^2-3y+y^2-1)\Big|_{\substack{x=0\\y=2}}=3$

所以点 $(0,2)$ 不在曲线上（因此不能直接应用公式（5.3—3）或（5.3—4））

设 Γ 的过点 $(0,2)$ 的切线 l：$\begin{cases} x=Xt \\ y=2+Yt \end{cases}$. 因为点 $(0,2)$ 不在 Γ 上，所以 l 不全部在 Γ 上，从而 l 与 Γ 相交于相互重合的两个点（由切线的定义）. 因此

$$\Delta=[XF_1(0,2)+YF_2(0,2)]^2-\Phi(X,Y)F(0,2)=0\ .$$

因 $F_1(0,2)=(x-\frac{1}{2}y)\Big|_{\substack{x=0\\y=2}}=-1 \quad F_2(0,2)=(-\frac{1}{2}x+y)\Big|_{\substack{x=0\\y=2}}=2$，

故有 $(-X+2Y)^2-3(X^2-XY+Y^2)=0$.

化简得：$2X^2+XY-Y^2=0$， 从而有 $(2X-Y)(X+Y)=0$.

$2X-Y=0$ 或 $X+Y=0$，$X:Y=1:2$ 或 $X:Y=1:-1$

l 的方程为 $\begin{cases} x=t \\ y=2+2t \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=t \\ y=2-t \end{cases}$，即 $2x-y+2=0$ 或 $x+y-2=0$.

解法二、设过点 $(0,2)$ 的切线与已知二次曲线 Γ 相交于点 (x_0,y_0)，则切线

$$l：\ x_0x-\frac{1}{2}(x_0y+y_0x)+y_0y-1=0 \quad 即 \quad (x_0-\frac{1}{2}y_0)x-(\frac{1}{2}x_0-y_0)y-1=0 \qquad (*)$$

因为 l 过点 $(0,2)$，所以将 $(0,2)$ 代入上式得 $-(\frac{1}{2}x_0-y_0)2-1=0$，即 $x_0-2y_0+1=0$（Ⅰ）

因为 $(x_0,y_0)\in\Gamma$　所以 $x_0{}^2-x_0y_0+y_0{}^2-1=0$（Ⅱ）.

解由（Ⅰ）（Ⅱ）联立的方程组得$\begin{cases} x_0=-1 \\ y_0=0 \end{cases}$ 或$\begin{cases} x_0=1 \\ y_0=1 \end{cases}$

将切点带入$(*)$得l：$2x-y+2=0$或$x+y-2=0$

3 课堂小结

切线方程的两种求法，奇异点的求法

4.布置作业

课本第 200 页习题：1、3

§5.4　二次曲线的直径

授课学时：2 学时

⑸ 教学目标

1.掌握二次曲线的直径的概念

2.会求二次曲线的直径的方程

3.掌握二次曲线的共轭方向与共轭直径的概念

二、教学重难点

1.教学重点：二次曲线的直径的方程及其讨论；二次曲线的共轭方向与共轭直径的概念；

2.教学难点：二次曲线的共轭方向与共轭直径的概念。

三、教学方法

多媒体辅助教学、讲练和探究式相结合教学法

四、教学过程

1. 导入

2. 讲解新知

一、 二次曲线的直径

当直线平行于二次曲线的某一非渐近方向时，此时，直线的方向 $X:Y$ 满足 $\Phi(X,Y)\neq 0$，由§5.1 中的讨论知，这条直线与二次曲线总交于两点（两个不同实的，两重合实的或一对共轭虚的）。这两点决定了二次曲线的一条弦，现在我们研究二次曲线上一族平行弦的中点的轨迹。

1. 二次曲线的一族平行弦的中点的轨迹

定理 5.4.1：二次曲线的一族平行弦的中点的轨迹是一条直线。

证：设二次曲线 $\Gamma: F(x,y)=0$，$X:Y$ 为 Γ 的一个非渐近方向，(x_0,y_0) 是平行于方向 $X:Y$ 的弦的中点，（下考虑 (x_0,y_0) 满足的方程）.

过 (x_0,y_0) 平行于 $X:Y$ 的弦为 $\begin{cases} x=x_0+Xt \\ y=y_0+Yt \end{cases}$，它与 Γ 的两交点由方程

$$\Phi(X,Y)t^2+2[XF_1(x_0,y_0)+YF_2(x_0,y_0)]t+F(x_0,y_0)=0 \qquad ①$$

两根 t_1,t_2 所决定。因为 (x_0,y_0) 是弦的中点，所以 $t_1+t_2=0$ （由定理 5.2.1 的证明可知）.

从而有 $XF_1(x_0,y_0)+YF_2(x_0,y_0)=0$ （理由同上），也就是说平行于方向 $X:Y$ 的弦的中点 (x_0,y_0) 的坐标满足方程

$$XF_1(x,y)+YF_2(x,y)=0 \qquad (5.4—1)$$

即

$$X(a_{11}x+a_{12}y+a_{13})+Y(a_{12}x+a_{22}y+a_{23})=0 \qquad (5.4—2)$$

或 $$(a_{11}X+a_{12}Y)x+(a_{12}X+a_{22}Y)y+a_{13}X+a_{23}Y=0 \quad （5.4—3）$$

反之，若点(x_0,y_0)满足（5.4—1），则方程①的两个根t_1,t_2满足$t_1+t_2=0$。从而(x_0,y_0)为具有方向$X:Y$的弦$\begin{cases}x=x_0+Xt\\ y=y_0+Yt\end{cases}$的中点.

综上，方程（5.4—1）或（5.4—2）或（5.4—3）为一族平行于某一非渐近方向$X:Y$的弦的中点轨迹方程.

以下说明平行于某一非渐近方向$X:Y$的弦的中点的轨迹为直线，只要说明它的方程为二元一次方程。

方程（5.4—3）的一次项系数不能全为零，否则，若$a_{11}X+a_{12}Y=a_{12}X+a_{22}Y=0$，则

$\Phi(x,y)=$

$$a_{11}X^2+2a_{12}XY+a_{22}Y^2=(a_{11}X+a_{12}Y)X+(a_{12}X+a_{22}Y)Y=0\cdot X+0\cdot Y=0$$

这与$X:Y$是非渐近方向矛盾。故（5.4—3）即（5.4—1）是一个二元一次方程，它是一条直线。

2. **定义**

二次曲线的平行弦中点的轨迹叫做这个二次曲线的直径，它所对应的平行弦叫做共轭于这条直线的共轭弦，而直径也叫做共轭于平行弦方向的直径

3. 方程

由定理 5.4.1 的证明及以上定义可知二次曲线Γ的共轭于平行弦方向$X:Y$的直径的方程为方程（5.4—1）或（5.4—3）

若二次曲线$F(x,y)=0$的一族平行弦的斜率为k，若共轭于这族平行弦的直线方程是

$$F_1(x,y)+kF_2(x,y)=0 \qquad （5.4—5）$$

这只要在方程（5.4—1）中令$\dfrac{Y}{X}=k$即得。

4.平面上的直线束

定义：平面上通过一点的所有直线的集合叫中心直线束，那个点叫直线束的中心；具有固定方向的所有直线的集合叫做平行直线束，固定方向叫做直线束的方向.

结论：若给定平面上的两直线. l_1：$A_1x+B_1y+C_1=0$，l_2：$A_2x+B_2y+C_2=0$，则方程

$l(A_1x+B_1y+C_1)+m(A_2x+B_2y+C_2)=0$（其中$l,m$为不全为零的两任意实数），

当l_1与l_2相交时，即$\dfrac{A_1}{A_2}\neq\dfrac{B_1}{B_2}$时，表示以$l_1$与$l_2$的交点为中心的中心直线束；当$l_1 /\!/ l_2$时，即$\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}\neq\dfrac{C_1}{C_2}$时，表示平行直线束，它的方向与$l_1$或$l_2$的方向相同。

5. 对二次曲线的直径的讨论

设$\Gamma: F(x,y)=0$. 考虑方程：

$$XF_1(x,y)+YF_2(x,y)=0 \quad ① \quad \text{这里} X,Y \text{为不全为零的任意实数}$$

$$F_1(x,y)=a_{11}x+a_{12}y+a_{13}=0 \qquad ②$$

$$F_2(x,y)=a_{12}x+a_{22}y+a_{23}=0 \qquad ③$$

（Ⅰ）当Γ为中心曲线时，$I_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}\neq 0$，即$\dfrac{a_{11}}{a_{12}}\neq\dfrac{a_{12}}{a_{22}}$， 此时 a_{11},a_{12}不全为零，②，③表不同的两直线，由直线束的结论知此时①为中心直线束。另一方面，Γ的全部直径为

$$XF_1(x,y)+YF_2(x,y)=0\text{，这里} X,Y \text{是不全为零的任意实数，}\Phi(X,Y)\neq 0.$$

与①比较可知，Γ的全部直径都在中心直线束①中。即Γ的全部直径属于一个中心直线束。这个直线束的中心就是的中心。因为由直线束的结论知，这个直线束的中心为直线②③的交点。即该中心的坐标满足$\begin{cases} F_1(x,y)=0 \\ F_2(x,y)=0 \end{cases}$。而满足这个方程组的点为$\Gamma$的中心

（Ⅱ）当Γ为无心曲线时，$\dfrac{a_{11}}{a_{12}}=\dfrac{a_{12}}{a_{22}}\neq\dfrac{a_{13}}{a_{23}}$.

（ⅰ）当②③表示不同的两平行直线时，由直线束的结论知：此时①为平行直线束。与（I）中的讨论类似，可知此时Γ的全部直线属于一个平行直线束。

（ⅱ）当②③中有一为矛盾方程时，（因为a_{11},a_{12},a_{22}不全为零，所以②③不可能都为矛盾方程）比如②为矛盾方程，此时 $a_{11}=a_{12}=0,a_{13}\neq 0$（此时 $a_{11}a_{22}=0=a_{12}a_{12},a_{13}a_{12}\neq 0,\ a_{12}a_{23}=0$。故也有$\dfrac{a_{11}}{a_{12}}=\dfrac{a_{12}}{a_{22}}=\dfrac{a_{13}}{a_{23}}$），这时$\Gamma$的全部直径为：$Xa_{13}+YF_2(x,y)=0$。它仍然属于一个平行直线束，该平行直线束的方向为直线$F_2(x,y)=0$的方向。由直线束的结论知，此时Γ的全部直径所属的平行直线束的方向$X':Y'$为直线②或直线③的方向。即$X':Y'=-\ a_{12}:a_{11}$或$-a_{22}:a_{12}$（由$\dfrac{x-x_0}{X}=\dfrac{y-y_0}{Y}$化为$Yx-Xy+C=0$知直线$ax+by+c=0$的方向为$-b:a$）。该方向为$\Gamma$的渐近方向（因为由$\dfrac{a_{11}}{a_{12}}=\dfrac{a_{12}}{a_{22}}$得${a_{12}}^2=a_{11}a_{22}$由此可得

$$\Phi(-a_{12},a_{11})=a_{11}(-a_{12})^2+2a_{12}(-a_{12})a_{11}+a_{22}{a_{11}}^2$$

$$=a_{11}{a_{12}}^2-2{a_{12}}^2a_{11}+a_{22}{a_{11}}^2=-{a_{12}}^2a_{11}+a_{22}{a_{11}}^2$$

$$=-a_{11}a_{22}a_{11}+a_{22}{a_{11}}^2=0\text{）}.$$

总之，无心曲线的直径属于一个平行直线束，它的方向为Γ的渐近方向。

（III）当Γ为线心曲线时，$\dfrac{a_{11}}{a_{12}}=\dfrac{a_{12}}{a_{22}}=\dfrac{a_{13}}{a_{23}}$.

（ⅰ）若②③表同一直线，此时，Γ的直径只有一条为$(X+Yb)F_1(x,y)=0$，

（$XF_1(x,y)+YF_2(x,y)=XF_1(x,y)+YbF_1(x,y)=(X+Yb)F_1(x,y)=0$）即$F_1(x,y)=0$。即

$a_{11}x+a_{12}y+a_{13}=0$（或$a_{12}x+a_{22}y+a_{23}=0$）由§5.2节的讨论知它是线心曲线Γ的中心直线。

（ⅱ）若②③中有一为恒等式，比如②中$a_{11}=a_{12}=a_{13}=0$（此时，也有$\dfrac{a_{11}}{a_{12}}=\dfrac{a_{12}}{a_{22}}=\dfrac{a_{13}}{a_{23}}$），

则Γ的直径为$YF_2(x_0,y_0)=0$，即$a_{12}x+a_{22}y+a_{23}=0$，此时Γ的直径也只有一条。它是Γ的中心直线。

总之当Γ为线心曲线时，Γ的直径只有一条，就是曲线的中心曲线.

有以上的讨论，我们得以下的定理5.4.2。

定理5.4.2 中心二次曲线的直径经过曲线的中心，无心二次曲线的直径平行于曲线的渐近方向，线心二次曲线的直径只有一条，就是曲线的中心曲线。

例1：求椭圆或双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}\pm\dfrac{y^2}{b^2}=1$的直径（这个曲线的$I_2\neq0$，故为中心曲线）.

解：$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{a^2}&0&0\\0&\pm\frac{1}{b^2}&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$F(x,y)=\dfrac{x^2}{a^2}\pm\dfrac{y^2}{b^2}-1=0$，$F_1(x,y)=\dfrac{x}{a^2}$，

$F_2(x,y)=\pm\dfrac{y}{b^2}$.

共轭于非渐近方向$X:Y$的直径为$\dfrac{x}{a^2}\pm\dfrac{y}{b^2}=0$.

注：由直径的方程可见，直径通过曲线的中心$(0,0)$

例2：求抛物线$y^2=2px$的直径.

解：$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -p \\ 0 & 1 & 0 \\ -p & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$F(x,y)=y^2-2px=0$，$F_1(x,y)=-p$，$F_2(x,y)=y$.

共轭于非渐近方向 $X:Y$ 的直径为 $-Xp+Yy=0$，即 $y=\dfrac{X}{Y}p$.

注：由所求方程可见，抛物线的直径确实平行于它的渐近方向 $1:0$

例 3：求二次曲线 Γ：$x^2-2xy+y^2+2x-2y-3=0$ 的共轭于非渐近方向 $X:Y$ 的直径.

解：$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$，$F_1(x,y)=x-y+1$，$F_2(x,y)=-x+y-1$.

直径方程为 $X(x-y+1)+Y(-x+y-1)=0$，即：$(X-Y)(x-y+1)=0$ (*)

设 $X':Y'$ 为 Γ 的渐近方向，则 $\Phi(X',Y')=0$ 即 $X'^2-2X'Y'+Y'^2=0$，

$(X'-Y')^2=0$，

$X':Y'=1:1$. 因为 $X:Y$ 为非渐近方向，所以 $X\neq Y$ 故由 (*) 得 Γ 的共轭于非渐近方向 $X:Y$ 的直径为：$x-y+1=0$.

注：它只是一条直径.

二、共轭方向与共轭直径

1. 共轭方向

设二次曲线 Γ：$F(x,y)=0$ $X:Y$ 为 Γ 的非渐近方向。由前面所讲的第一部分知共轭于平行弦方向 $X:Y$ 的直径为

$$XF_1(x,y)+YF_2(x,y)=0 \qquad (5.4—1)$$

即：
$$(a_{11}X+a_{12}Y)x+(a_{12}X+a_{22}Y)y+(a_{13}X+a_{23}Y)=0 \qquad (5.4—3)$$

该直径的方向 $X':Y'=-(a_{12}X+a_{22}Y):(a_{11}X+a_{12}Y)$

定义 若共轭于 Γ 的非渐近方向 $X:Y$ 的直径的方向，即满足

$$X':Y'=-(a_{12}X+a_{22}Y):(a_{11}X+a_{12}Y) \qquad ④$$

的方向 $X':Y'$ 称为 $X:Y$ 的共轭方向。

令 $X'=-(a_{12}X+a_{22}Y)t, t\neq 0$，则 $Y'=(a_{11}X+a_{12}Y)t$（由④知），从而有

$$\Phi(X',Y')=a_{11}X'^2+2a_{12}X'Y'+a_{22}Y'^2$$

$$=a_{11}(a_{12}X+a_{22}Y)^2t^2-2a_{12}(a_{12}X+a_{22}Y)(a_{11}X+a_{12}Y)t^2a_{22}+a_{22}(a_{11}X+a_{22}Y)^2t^2$$

$$=(a_{11}a_{22}-a_{12}{}^2)(a_{11}X^2+2a_{12}XY+a_{22}Y^2)t^2=I_2\Phi(X,Y)t^2$$

因为 $X:Y$ 为非渐近方向，所以 $\Phi(X,Y)\neq 0$．又 $t\neq 0$ 故当 $I_2\neq 0$ 即 Γ 为中心曲线时 $\Phi(X',Y')\neq 0$；当 $I_2=0$ 即 Γ 为非中心曲线时 $\Phi(X',Y')=0$.即中心二次曲线的非渐近方向的共轭方向仍然是非渐近方向，而非中心曲线的非渐近方向的共轭方向是渐近方向.

2. 中心曲线的共轭直径

由于对中心曲线来说，非渐近方向 $X:Y$ 的共轭方向 $X':Y'$ 是非渐近方向。从而可考虑 X',Y' 的共轭方向. 由④得而从曲线的非渐近方向 $X:Y$ 与它的共轭方向 $X':Y'$ 之间的关系为

$X'(a_{11}X+a_{12}Y)+Y'(a_{12}X+a_{22}Y)=0$ 即 $a_{11}XX'+a_{12}(XY'+X'Y)+a_{22}YY'=0$（5.4—5）

（这表明 $X:Y$ 与它的共轭方向 $X':Y'$ 是对称的），亦即

$$X(a_{11}X'+a_{12}Y')+Y(a_{12}X'+a_{22}Y')=0$$

即
$$X:Y=-(a_{12}X'+a_{22}Y'):(a_{11}X'+a_{12}Y')$$

由定义 $X:Y$ 是 $X':Y'$ 的共轭方向.

总之，中心二次曲线的非渐近方向 $X:Y$ 及其共轭方向 $X':Y'$ 是相互共轭的方向。由共轭方向的概念，由这两个相互共轭的方向，就有两条分别取这两个方向之一的直径

定义 5.4.2 中心曲线的一对具有相互共轭方向的直径叫做一对共轭直径。

注：设 $\frac{Y}{X}=k$，$\frac{Y'}{X'}=k'$ 代入（5.4—5）得 $a_{22}kk'+a_{12}(k+k')+a_{11}=0$（5.4—6）这是一对共轭直径的斜率满足的关系式。

例如 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的一对共轭直径的斜率 k 与 k' 有着关系 $\frac{1}{b^2}kk'+\frac{1}{a^2}=0$.

我们可将二次曲线的非渐近方向的共轭方向的概念推广为任一方向的共轭方向的概念.

定义 5.4.4 设 $X:Y$ 为二次曲线 $F(x,y)=0$ 的任一方向（不要求 $X:Y$ 为非渐近方向）。满足下列关系：$a_{11}XX'+a_{12}(XY'+X'Y)+a_{22}YY'=0$ 的方向 X',Y' 称为 $X:Y$ 的共轭方向.

设 $X:Y$ 为二次曲线 $F(x,y)=0$ 的渐近方向则

$$a_{11}XX+2a_{12}XY+a_{22}YY=0 \quad 即 \quad a_{11}XX+a_{12}(XY+XY)+a_{22}YY=0$$

由上式及定义 5.4.4 知对二次曲线的渐近方向 $X:Y$ 来说 $X:Y$ 与 $X:Y$ 共轭（为与自己共轭的方向）。

由于渐近线是通过二次曲线的中心且以渐近方向 $X:Y$ 为方向的直线，所以，渐近线也可看

成与自己共轭的直径。因此，利用直径的方程公式，中心二次曲线渐近线的方程可写为

$XF_1(x,y)+YF_2(x,y)=0$ （5.4—9），其中 $X:Y$ 为二次曲线的渐近方向

注：由定义 $X':Y'$ 为二次曲线 $F(x,y)=0$ 的非渐近方向 $X:Y$ 的共轭方向 $\Leftrightarrow$ ④成立

$\Leftrightarrow a_{11}XX'+a_{12}(XY'+X'Y)+a_{12}YY'=0$ （5.4—5）

由此，可求 $X:Y$ 的共轭方向 $X':Y'$

例 求二次曲线 $\Gamma:3x^2-2xy+3y^2+4x+4y-4=0$ 的一对共轭直径，使其中一条直径过点 $(1,-2)$ 。

解：设 l_0 为 Γ 的过 $(1,-2)$ 的一条直径，共轭于 l 的共轭弦的方向为 $X:Y$.

$$A=\begin{pmatrix}3&-1&2\\-1&3&2\\2&2&-4\end{pmatrix}，F_1(x,y)=3x-y+2，\quad F_2(x,y)=-x+3y+2.$$

l 的方程为：$X(3x-y+2)+Y(-x+3y+2)=0$ 。 (*)

因为 $(1,-2)\in l$，所以将 $(1,-2)$ 带入 (*) 得：$7X-5Y=0$ ，$X:Y=5:7$

l 的方程为：$5(3x-y+2)+7(-x+3y+2)=0$， 即 $x+2y+3=0$.

设 l' 为与 l 共轭的直径，则 l 的方向为 l' 的共轭弦的方向。

l 的方向为 $-2:1$，所以 l' 的方程为：$-2(3x-y+2)+(-x+3y+2)=0$.

即 l'：$7x-5y+2=0$.

3.课堂小结

直线的和共轭直径的求法

4.布置作业

课本第 206 页习题：1、2、3

§5.5 二次曲线的主直径与主方向

授课学时：2 学时

一、　教学目标

1. 掌握二次曲线的主直径与主方向的概念

2.掌握二次曲线的主直径与主方向的求法

二、教学重难点

1.教学重点：二次曲线的主直径与主方向的求法；

2.教学难点：二次曲线的主直径与主方向的概念。

三、教学方法

多媒体辅助教学、讲练和探究式相结合教学法

四、教学过程

1. 导入

特殊方向的直径

2. 讲解新知

1.定义 既垂直又共轭的两个方向对应的直径——主方向；主直径。

2. 二次曲线 $F(x,y)=0$ 的特征方程及特征根：$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix}=0$。即

$\lambda^2-I_1\lambda+I_2=0$ 为特征方程，其根为特征根。

3. 求法

$X:Y$ 成为二次曲线的主方向 $\Leftrightarrow$ （5.5—1）即（5.5—1$'$）成立。其中 λ 为 Γ 的特征根

从 Γ 的特征方程（5.5.3）求出特征根 λ_1,λ_2，将其分别代入（5.5—1）或（5.5—1$'$）就的相应的主方向

定理 5.5.3、一个方向 $X:Y$ 成为二次曲线主方向的条件是

$$\begin{cases} a_{11}X+a_{12}Y=\lambda X \\ a_{12}X+a_{22}Y=\lambda Y \end{cases}$$ 成立，其中 λ 是特征方程的根

证明：1^0 若二次曲线为中心二次曲线 $(I_2\neq 0)$

与 $X:Y$ 共轭的直径为 $XF_1(x,y)+YF_2(x,y)=0$, 设其方向为 $X':Y'$

则 $X':Y'=-(a_{12}X+a_{22}Y):(a_{11}X+a_{12}Y)$

$\because XX'+YY'=0\Rightarrow X':Y'=-Y:X$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{12}X + a_{22}Y = \lambda Y \\ a_{11}X + a_{12}Y = \lambda X \end{cases} \text{其中} \lambda \neq 0$$

2^0 若非中心二次曲线 $(I_2 = 0)$

任何直径方向总是唯一的渐近方向

$$X_1 : Y_1 = -a_{12} : a_{11} = a_{22} : (a_{12})$$

而垂直于它的方向显然为

$$X_2 : Y_2 = a_{11} : a_{12} = a_{12} : a_{22}$$

若主方向为非渐近方向 $X:Y$ 则由（5.4—1）得共轭于它的主直径：$XF_1(x,y)+YF_2(x,y)=0$

定理 5.5.4　二次曲线中圆有无数个主直径，通过圆心的任何直线都是圆的主直径。除圆外的中心曲线又且仅有两条互相垂直从而又互相共轭的主直径。非中心二次曲线只有一条主直径。

例 1 求 $F(x,y) = x^2 - xy + y^2 - 1 = 0$ 的主方向与主直径

解：$I_1 = 2, I_2 = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{3}{4} \neq 0$

$\therefore$　曲线为中心曲线，特征方程为 $\lambda^2 - 2\lambda + \frac{3}{4} = 0$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{2}, \lambda_2 = \frac{3}{2}$$

由 $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ 确定的主方向为 $X_1 : Y_1 = 1:1$

由 $\lambda_2 = \frac{3}{2}$ 确定的主方向为 $X_2 : Y_2 = -1:1$

代入得主直径。

例 2 求 $F(x,y) = x^2 - 2xy + y^2 - 4x = 0$ 的主方向与主直径

注意:渐近方向不对应主直径。

3.课堂小结

特征方程 特征根 对应主方向 主直径

主直径的个数

4.布置作业

课本第 212 页习题：2、3.

§5.6 二次曲线的化简与分类

授课学时：2 学时

一、　教学目标

1. 掌握四种平面直角坐标变换公式

2.会化简二次曲线的方程

3.了解二次曲线的分类

二、教学重难点

1.教学重点：二次曲线方程的化简；

2.教学难点：利用二次曲线的主直径化简二次曲线的方程。

三、教学方法

多媒体辅助教学、讲练和探究式相结合教学法

四、教学过程

1. 导入

二次曲线直接看形状不太好看，怎么办？怎么把二次曲线的方程化简呢？

2. 讲解新知

这一节，我们将在直角坐标系下，利用坐标变换，使二次曲线的方程在新坐标系下具有最简形式。然后在此基础上进行二次曲线的分类。

一、平面直角坐标变换

1.　移轴公式

把坐标轴平行移动叫移轴

设 P 在旧坐标系 $o-xy$ 下的坐标为 (x,y)，设 P 在新坐标系 $o'-x'y'$ 下的坐标为 (x',y')，新坐标系原点 o' 在旧坐标系里的坐标为 (x_0,y_0)。

因为 $\overrightarrow{oP}=\overrightarrow{oo'}+\overrightarrow{o'P}$，所以

$$\{x,y\}=\{x_0,y_0\}+\{x-x_0,y-y_0\}=\{x_0,y_0\}+\{x',y'\}=\{x_0+x',y_0+y'\}\ .$$

因此，$\begin{cases}x=x_0+x'\\y=y_0+y'\end{cases}$　（5.6—1）　或 $\begin{cases}x'=x-x_0\\y'=y-y_0\end{cases}$　（5.6—1'）

（5.6—1）或 5.6—1'）表示同一点关于新旧坐标系的新旧坐标的关系，称为移轴公式。

2. 转轴公式

设平面内有一点 P，把 x 轴和 y 轴同时按逆时针方向转过同一个角设 α，ox 转到 ox' 的位置，oy 转到 oy' 的位置，称为转轴。

设 P 在旧坐标系 $o-xy$ 中的坐标为 (x,y)，在新坐标系 $o'-x'y'$ 中的坐标为 (x',y')。

$$\begin{cases} x = 射影_{\vec{i}}\overrightarrow{oP} = \left|\overrightarrow{oP}\right|\cos\angle(\overrightarrow{oP},\vec{i}) = \left|\overrightarrow{oP}\right|\cos(\varphi+\alpha) = \left|\overrightarrow{oP}\right|(\cos\varphi\cos\alpha - \sin\varphi\sin\alpha) \\ y = 射影_{\vec{j}}\overrightarrow{oP} = \left|\overrightarrow{oP}\right|\cos\angle(\overrightarrow{oP},\vec{j}) = \left|\overrightarrow{oP}\right|\sin(\varphi+\alpha) = \left|\overrightarrow{oP}\right|(\sin\varphi\cos\alpha + \cos\varphi\sin\alpha) \end{cases}$$

①

$$\begin{cases} x' = 射影_{\vec{i}'}\overrightarrow{oP} = \left|\overrightarrow{oP}\right|\cos\angle(\overrightarrow{oP},\vec{i}') = \left|\overrightarrow{oP}\right|\cos\varphi \\ y' = 射影_{\vec{j}'}\overrightarrow{oP} = \left|\overrightarrow{oP}\right|\cos\angle(\overrightarrow{oP},\vec{j}') = \left|\overrightarrow{oP}\right|\sin\varphi \end{cases} \qquad ②$$

将②代入①得：$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases}$ （5.6—2）

上式称为转轴公式。

3.一般坐标变换公式

在一般时候，由旧坐标系$o-xy$变成新坐标系$o'-x'y'$总可分两步完成。先移轴使坐标原点与新坐标系的原点o'重合，变成坐标系$o'-x''y''$，然后由辅助坐标系$o'-x''y''$再转轴而成新坐标系$o'-x'y'$。

设平面上任意点P的新旧坐标分别为(x',y')与(x,y)，由（5.6—1）得$\begin{cases} x = x''+x_0 \\ y = y''+y_0 \end{cases}$

③

由（5.6—2）得$\begin{cases} x'' = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y'' = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases}$ ④

将④代入③得：$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha + x_0 \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha + y_0 \end{cases}$ （5.6—3）

（5.6—3）称为一般坐标变换公式。

由（5.6—3）解出x',y'便得逆变换公式：

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha - (x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha) \\ y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha - (-x_0\sin\alpha + y_0\cos\alpha) \end{cases} \qquad （5.6—4）$$

4．一般坐变换公式的另一种形式

设在直角坐标系$o-xy$里给定了两条相互垂直的直线：

$$l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0，\quad l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

（因为$l_1 \perp l_2$，所以l_1与l_2的方向向量$\{-B_1, A_1\}$与$\{-B_2, A_2\}$相互垂直，所以

$A_1A_2 + B_1B_2 = 0$）

若取l_1为新坐标系中的横轴$o'x'$，l_2为纵轴$o'y'$，并设平面上任意点M的新旧坐标分别为

(x',y')与(x,y)，则$|x'|$为点M (x,y)到$o'y'$轴的距离：$|x'|=\dfrac{|A_2x+B_2y+C_2|}{\sqrt{A_2{}^2+B_2{}^2}}$. 同理

$|y'|=\dfrac{|A_1x+B_1y+C_1|}{\sqrt{A_1{}^2+B_1{}^2}}$，去掉绝对值符号后，便有

$$\begin{cases} x'=\pm\dfrac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2{}^2+B_2{}^2}} \\ y'=\pm\dfrac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1{}^2+B_1{}^2}} \end{cases} \qquad (5.6—5)$$

为了使新坐标系仍就为右手坐标系，我们来决定（5.6—5）中的符号.在推导一般坐标变换公式

（5.6—4）时，新坐标系仍为右手坐标系，因此将（5.6—5）式与（5.6—4）中的系数相比较，即可确定（5.6—5）的符号.将（5.6—5）式与（5.6—4）中x,y的系数相比较得

$$\frac{\pm A_2}{\sqrt{A_2{}^2+B_2{}^2}}=\cos\alpha,\frac{\pm B_2}{\sqrt{A_2{}^2+B_2{}^2}}=\sin\alpha$$

$$\frac{\pm A_1}{\sqrt{A_1{}^2+B_1{}^2}}=-\sin\alpha,\frac{\pm B_1}{\sqrt{A_1{}^2+B_1{}^2}}=\cos\alpha$$

因此，（5.6—5）中的第一式右端的x的系数应与第二式右端的y的系数相等，从而（5.6—5）的符

号选取要使这两项的系数是同号的.

例 1：（P_{215}）

二、二次曲线方程的化简

1.在移轴下，二次曲线方程系数的变换规律及应用

设二次曲线$\Gamma:F(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+a_{13}x+a_{23}y+a_{33}=0$在移轴即

$\begin{cases} x=x'+x_0 \\ y=y'+y_0 \end{cases}$下，$\Gamma$的新方程为$F(x'+x_0,y'+y_0)=0$，即

$$a_{11}(x'+x_0)^2+2a_{12}(x'+x_0)(y'+y_0)+a_{22}(y'+y_0)^2+a_{13}(x'+x_0)+2a_{23}(y'+y_0)+a_{33}=0$$

……（见课本P_{217}正 13 行——P_{218}正 2 行）

2. 在转轴下二次曲线方程系数的变化规律及应用

（P_{218}正 3 行——P_{219}正 11 行）

3.　用移轴与转轴化简二次曲线方程的方法

以例题说明：

例 2：

4. 利用二次曲线的主直径化简二次曲线的方程的方法

命题　利用转轴来消去二次曲线方程的 xy 项，实际上是把坐标轴旋转到与二次曲线的主方向平行的位置。

证：若二次曲线的特征根确定的主方向为 $X:Y$，则由主方向满足的条件

$$\begin{cases} a_{11}X + a_{12}Y = \lambda X \\ a_{12}X + a_{22}Y = \lambda Y \end{cases}$$

得 $tg\overline{\alpha} = \dfrac{Y}{X} = \dfrac{\lambda - a_{11}}{a_{12}} = \dfrac{a_{12}}{\lambda - a_{22}}$，因此

$$ctg2\overline{\alpha} = \frac{1 - tg^2\overline{\alpha}}{2tg\overline{\alpha}} = \frac{1 - (\dfrac{a_{12}}{\lambda - a_{22}})^2}{2\dfrac{a_{12}}{\lambda - a_{22}}} = \frac{1 - \dfrac{a_{12}}{\lambda - a_{22}}\dfrac{\lambda - a_{11}}{a_{12}}}{\dfrac{2a_{12}}{\lambda - a_{22}}} = \frac{\lambda - a_{22} - (\lambda - a_{11})}{2a_{12}} = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}$$

而消去 xy 项所需转轴的转角 α 满足 $ctg2\alpha = \dfrac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}} = ctg2\overline{\alpha}$，从而有 $\overline{\alpha} = \alpha$ 或 $\overline{\alpha} = \alpha \pm \pi$.

二次曲线的方程除了用转轴与移轴的方法外，还可利用二次曲线的主直径来作坐标变换来达到。

定理 5.6.1 适当选取坐标系，二次曲线的方程总可化成下列三个简化方程中的一个：

（Ⅰ）　$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33} = 0, a_{11}a_{22} \neq 0$

（Ⅱ）　$a_{22}y^2 + 2a_{13}x = 0, a_{22}a_{13} \neq 0$

（Ⅲ）　$a_{22}y^2 + a_{33} = 0, a_{22} \neq 0$

证：1^0　当已知二次曲线 Γ 为中心曲线时，此时，由定理 5.5.4 及其证明知 Γ 至少有一对互相垂直，从而又互相共轭的主直径。取 Γ 的一对既共轭又相互垂直的主直径作为坐标轴建立直角坐标系 oxy，设 Γ 在这样的坐标系下的方程为

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 .$$

因为 Γ 为中心二次曲线，所以 Γ 的直径过曲线的中心。（定理 5.4.2）所以，以两主直径为坐标轴的坐标系的原点就是 Γ 的中心。由定理 5.2.1 的推论(坐标原点是二次曲线的中心 $\Leftrightarrow$ 曲线方程不含 x 与 y 的一次项）知 $a_{13} = a_{23} = 0$.

其次，Γ 的两直主直径（即坐标轴）的方向为 $1:0$ 与 $0:1$. 因为这两主直径共轭，所以

它们的方向相互共轭. 所以，由二次曲线的非渐近方向 $X:Y$ 与它的共轭方向 $X':Y'$ 之间的关系（5.4—5）：$a_{11}XX'+a_{12}(XY'+X'Y)+a_{22}YY'=0$

知 $a_{11}\cdot 1\cdot 0+a_{12}(1\cdot 1+0\cdot 0)+a_{22}0\cdot 1=0$ ，即 $a_{12}=0$. 故 Γ 的方程为

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}=0, a_{11}a_{22}\neq 0$$

因为 Γ 为中心曲线，所以 $I_2=a_{11}a_{22}-{a_{12}}^2=a_{11}a_{22}\neq 0$.

2^0 当已知二次曲线 Γ 为无心曲线时，此时，由定理 5.5.4 知 Γ 有唯一一条主直径。取 Γ 的唯一主直径为 x 轴，取过 Γ 的顶点（即主直径与 Γ 的交点）且以非渐近主方向为方向的直线（即过 Γ 的顶点垂直于主直径的直线）为 y 轴建立坐标系。设 Γ 在该坐标系下的方程为：

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0 \qquad (**)$$

因为这时主直径的共轭方向为：$X:Y=0:1$，所以 主直径的方程为：$0\cdot F_1(x,y)+1\cdot F_2(x,y)=0$

即
$$a_{12}x+a_{22}y+a_{23}=0 \qquad (*)$$

因为 $(*)$ 为 x 轴，即 $(*)$ 为 $y=0$，所以 $a_{12}=a_{23}=0, a_{22}\neq 0$. 因为 Γ 的顶点与坐标原点重合，所以 $(0,0)$ 满足曲线方程，从而将 $(0,0)$ 代入 $(**)$ 得 $a_{33}=0$. 另外，由于 Γ 为无心曲线，所以

$$\frac{a_{11}}{a_{12}}=\frac{a_{12}}{a_{22}}\neq\frac{a_{13}}{a_{23}}$$

因为 $a_{12}=0, a_{22}\neq 0$ ，所以 $a_{11}=0$（否则，若 $a_{11}\neq 0$ 则 $a_{11}a_{22}\neq 0={a_{12}}^2$，而由 $\frac{a_{11}}{a_{12}}=\frac{a_{12}}{a_{22}}$ 得 $a_{11}a_{22}={a_{12}}^2$，矛盾）. 因为 $a_{12}=0, a_{22}\neq 0$，所以 $a_{13}\neq 0$（否则，若 $a_{13}=0$ 则 $a_{13}a_{22}=0=a_{12}a_{23}$，而由 $\frac{a_{12}}{a_{22}}\neq\frac{a_{13}}{a_{23}}$ 得 $a_{13}a_{22}\neq a_{12}a_{23}$，矛盾）. 故 Γ 的方程为：$a_{22}y^2+2a_{13}x=0,(a_{22}a_{13}\neq 0)$

3^0 当已知二次曲线 Γ 为线心曲线时，取它的中心直线（即曲线的唯一直径也是主直径）为 x 轴，任意垂直于它的直线为 y 轴，建立坐标系，设 Γ 在该坐标系下的方程为 $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$. 因为线心曲线的中心直线的方程是

$$a_{11}x+a_{12}y+a_{13}=0 \quad \text{与} \quad a_{12}x+a_{22}y+a_{23}=0$$

中任何一个，第二个方程表x轴的条件是$a_{12}=a_{23}=0,a_{22}\neq 0$，而第一个方程在$a_{12}=0$的条件下，不可能再表示$x$轴，所以它必须是恒等式。因而有$a_{11}=a_{13}=0$. 故$\Gamma$的方程为：

$$a_{22}y^2+a_{33}=0,a_{22}\neq 0.$$

注：1^0　由定理 5.6.1 知二次曲线总可化成三种简化方程之一.

2^0　由定理 5.6.1 的证明知，要化简二次曲线的方程，可把坐标轴变换到与二次曲线的主直径（即对称轴）重合的位置，若是中心曲线，新坐标原点与曲线的中心重合；若是无心曲线，坐标原点与曲线的顶点重合；若是线心曲线，坐标原点可以与曲线的任何一个中心重合。在这样的坐标变换下，可得二次曲线的化简方程。具体的方法以以下三个例子说明

例 4 化简$\Gamma: x^2-3xy+y^2+10x-10y+21=0$，并作出它的图形.

解：Γ的矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & -3/2 & 5 \\ -3/2 & 1 & -5 \\ 5 & -5 & 21 \end{pmatrix}$，$I_1=1+1=2$ ，$I_2=\begin{vmatrix} 1 & -3/2 \\ -3/2 & 1 \end{vmatrix}=-\dfrac{5}{4}$.

因为$I_2\neq 0$　所以Γ为中心曲线.

Γ的特征方程为$\lambda^2-2\lambda-\dfrac{5}{4}=0 \qquad (\lambda^2-I_1\lambda+I_2=0)$.

Γ的特征根为　$\lambda_1=-\dfrac{1}{2},\lambda_2=\dfrac{5}{2}$.

Γ的两个主方向为　$X_1:Y_1=-\dfrac{3}{2}:(-\dfrac{1}{2}-1)=1:1$；$X_2:Y_2=-\dfrac{3}{2}:(\dfrac{5}{2}-1)=-1:1$

（由定理 5.5.4 的证明知，当Γ为中心曲线时，若Γ有不等的两非零的实根λ_1,λ_2，则Γ有两非渐进主方向：$X_i:Y_i=a_{12}:(\lambda_i-a_{11})=(\lambda_i-a_{22}):a_{12},i=1,2$）

$F_1(x,y)=x-\dfrac{3}{2}y+5$，　$F_2(x,y)=-\dfrac{3}{2}x+y+5$

共轭于主方向$1:1$的主直径为：$1\cdot(x-\dfrac{3}{2}y+5)+1\cdot(-\dfrac{3}{2}x+y-5)=0$，即$x+y=0$.

共轭于主方向$-1:1$的主直径为：$-(x-\dfrac{3}{2}y+5)+(-\dfrac{3}{2}x+y-5)=0$，即$x-y+4=0$.

取两主直径为新坐标轴，并取$x-y+4=0$为x'轴，则坐标变换公式为

$$\begin{cases} x' = \pm\dfrac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^{\ 2}+B_2^{\ 2}}} = \dfrac{x+y}{\sqrt{2}} \\ y' = \pm\dfrac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^{\ 2}+B_1^{\ 2}}} = \dfrac{x-y+4}{-\sqrt{2}} \end{cases} \qquad (*)$$

解出 x 与 y 得：$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x' - \dfrac{\sqrt{2}}{2}y' - 2 \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x' + \dfrac{\sqrt{2}}{2}y' + 2 \end{cases}$

代入 Γ 的方程得：$-\dfrac{1}{2}x'^2 + \dfrac{5}{2}y'^2 + 1 = 0$

Γ 的标准方程为：$\dfrac{x'^2}{2} - \dfrac{y'^2}{2/5} = 1$（这是一条双曲线）

作图时，先在老坐标系中画出两主直径作为新坐标轴。再确定 x' 轴（这里为 $x-y+4=0$）的正向. 设 x 轴到 x' 轴的转角为 α.（变换公式中 x' 表达式的右端，x 项的系数为 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，y 项的系数为 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$）由一般坐标变换公式（5.6—4）（(P_{212}) 中 x' 的表达的 x 项的系数，y 项的系数相比较）知 $\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$。因此 x 轴到 x' 轴的转角为 $\dfrac{\pi}{4}$. 由此即可确定 x' 的正向。再按右手法则可确定 y' 轴的正向。从而，即得新坐标系，在新坐标系中，按 Γ 的标准方程即可作出 Γ 的图形。

例 5：(P_{222})

例 6：(P_{224})

三、二次曲线的分类

定理 5.6.2　(P_{229})

证明：（P_{230} 正 5 行—— P_{231} 倒一行）

3.课堂小结

化简二次曲线的方法——移轴和转轴，移轴有何特征，转轴有何特征？

移轴移到什么位置？转轴转到什么位置？

4.布置作业

课本第 232 页习题：1、3.

§5.7 应用不变量化简二次曲线的方程

授课学时：2 学时

一、　教学目标

1. 掌握不变量和不变量的概念
2. 会利用不变量来化简二次曲线的方程
3. 了解二次曲线的分类

二、教学重难点

1.教学重点：二次曲线方程的化简；

2.教学难点：利用不变量化简二次曲线的方程。

三、教学方法

多媒体辅助教学、讲练和探究式相结合教学法

四、教学过程

1. 导入

上一节二次曲线的化简比较麻烦，那么有没有比较简单的方程化简二次曲线方程？

2. 讲解新知

一、不变量与半不变量

三个不变量 $I_1 = a_{11} + a_{22}, I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$

$$F(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

在直角变换下： $F'(x',y') = a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33}$

$$I_1' = a_{11}' + a_{22}', I_2 = \begin{vmatrix} a_{11}' & a_{12}' \\ a_{12}' & a_{22}' \end{vmatrix}$$

一个半变量 $K_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$ 经过转轴不改变

th1、当二次曲线为线心曲线时，在直角坐标变换下 K_1 是不变量

二、　应用不变量化简二次曲线的方程

1^0　中心曲线　$I_2 \neq 0, a_{11}'x'^2 + a_{22}'y'^2 + a_{33} = 0$

$$I_1' = a_{11}' + a_{22}' = I_1, I_2' = a_{11}'a_{22}' = I_2$$

$\therefore a_{11}{}'$与$a_{22}{}'$是特征方程$\lambda^2 - I_1\lambda + I_2 = 0$的的特征根

$I_3{}' = I_2 a_{33}{}' \Rightarrow a_{33}{}' = \dfrac{I_3}{I_2}$

2^0 无心曲线 $I_2 = 0, I_3 \neq 0$

$$I_1{}' = a_{22}{}' = I_1, I_3{}' = -I_1 a_{13}{}'^2 = I_3 \Rightarrow a_{13}{}' = \pm\sqrt{-\frac{I_3}{I_1}}$$

3^0 线心曲线 $I_2 = I_3 = 0$

$$a_{22}{}' y'^2 + a_{33}{}' = 0, I_1{}' = a_{22}{}' = I_1, K_1{}' = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_{33}{}' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22}{}' & 0 \\ 0 & a_{33}{}' \end{vmatrix} = I_1 a_{33}{}' = K_1$$

1^0

$I_1{}' = a_{11}{}' + a_{22}{}' = I_1$

$I_2{}' = \begin{vmatrix} a_{11}{}' & 0 \\ 0 & a_{22}{}' \end{vmatrix} = a_{11}{}' a_{22}{}' = I_2$

$\Rightarrow a_{11}{}'$与$a_{22}{}'$是方程$\lambda^2 - I_1\lambda + I_2 = 0$(特征方程）的两根

$I_3{}' = a_{11}{}' a_{22}{}' a_{33}{}' = I_2 a_{33}{}' = I_3 \Rightarrow a_{33}{}' = \dfrac{I_3}{I_2}$

简化方程为$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \dfrac{I_3}{I_2} = 0$

2^0 无心曲线$\dfrac{a_{11}}{a_{12}} = \dfrac{a_{12}}{a_{22}} \neq \dfrac{a_{13}}{a_{23}}$即$I_2 = 0, I_3 \neq 0$

其简化方程为$a_{22}{}' y'^2 + 2a_{13}{}' x' = 0$

$$I_1{}' = a_{22}{}' = I_1, I_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13}{}' \\ 0 & a_{22}{}' & 0 \\ a_{13}{}' & 0 & 0 \end{vmatrix} = -a_{22}{}' a_{13}{}' = -I_1 a_{13}{}'^2 = -I_1 a_{13}{}'^2 = I_3$$

$\Rightarrow a_{13}{}'^2 = -\dfrac{I_3}{I_1} \Rightarrow a_{13}{}' = \pm\sqrt{-\dfrac{I_3}{I_2}}$

简化方程为：$I_1 y^2 \pm \sqrt{-\dfrac{I_3}{I_1}} x = 0$

3^0 线心曲线 $\dfrac{a_{11}}{a_{12}} = \dfrac{a_{12}}{a_{22}} = \dfrac{a_{13}}{a_{23}}$即$I_2 = I_3 = 0$

简化方程为 $a_{22}{}' y'^2 + a_{33}{}' = 0$

$$I_1{}' = a_{22}{}' = I_1$$

$$K_1{}' = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_{33}{}' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22}{}' & 0 \\ 0 & a_{33}{}' \end{vmatrix} = a_{22}{}' a_{33}{}' = I_1 a_{33}{}' = K_1$$

$$\Rightarrow a_{33}{}' = \frac{K_1}{I_1}$$

简化方程为$I_1 y^2 + \dfrac{K_1}{I_1} = 0$

步骤：(1)求I_1, I_2, I_3

(2)若$I_2 \neq 0$应用I_1, I_2, I_3

$$若I_2 = 0\begin{cases} I_3 \neq 0 & 应用I_1, I_3 \\ I_3 = 0 & 应用I_1, K_1 \end{cases}$$

例 1：化简 $5x^2 - 6xy + 5y^2 - 6\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y - 4 = 0$

解：$I_1 = 10, I_2 = 16, I_3 = -128$

$$x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$$

$$I_1 = 2, I_2 = 0, I_3 = -64$$

$$2y^2 - 2\sqrt{32}x = 0或2y^2 + 2\sqrt{32}x = 0$$

三、 二次曲线的分类

<table>
<tr><td colspan="6">二次曲线</td></tr>
<tr><td colspan="2">类型判别</td><td colspan="4">形状判别</td></tr>
<tr><td rowspan="5">$I_2 \neq 0$
中心二次曲线</td><td rowspan="3">$I_2 > 0$
椭圆型</td><td rowspan="2">$I_3 \neq 0$</td><td>$I_1 I_3 < 0$</td><td>椭圆</td></tr>
<tr><td>$I_1 I_3 > 0$</td><td>虚椭圆</td></tr>
<tr><td colspan="2">$I_3 = 0$</td><td>点</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$I_2 < 0$
双曲型</td><td colspan="2">$I_3 \neq 0$</td><td>双曲线</td></tr>
<tr><td colspan="2">$I_3 = 0$</td><td>两相交直线</td></tr>
<tr><td>$I_2 = 0$，$I_3 \neq 0$
无心二次曲线</td><td rowspan="4">$I_2 = 0$
抛物型</td><td colspan="2">$I_3 \neq 0$</td><td>抛物线</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$I_2 = I_3 = 0$
线心二次曲线</td><td rowspan="3">$I_3 = 0$</td><td>$K_1 < 0$</td><td>两平行直线</td></tr>
<tr><td>$K_1 > 0$</td><td>两平行的
共轭虚直线</td></tr>
<tr><td>$K_1 = 0$</td><td>两重合直线</td></tr>
</table>

3.课堂小结

认识不变量和半不变量，会用不变量化简二次曲线为简单曲线和标准曲线。

4.布置作业

课本第 244 页习题：1.