第五章　　二次曲线的一般理论

典型题解

解答题

1．写出下列二次曲线的矩阵 A 以及 $F_1(\mathrm{x},\mathrm{y})$，$F_2(\mathrm{x},\mathrm{y})$，$F_3(x,y)$：

(1) $y^2 = 2px$;　　　　　　(2) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$;

解　（1）　　$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & p \\ 0 & -1 & 0 \\ p & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$$F_1(x,y) = p, F_2(x,y) = -y, F_3(x,y) = px;$$

（2）　　$A = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,

$$F_1(x,y) = \frac{x}{a^2}, F_2(x,y) = -\frac{x}{b^2}, F_3(x,y) = -1;$$

2．求二次曲线 $x^2 - 2xy - 3y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$ 与下列直线的交点：

⑴ 5x-y-5=o;　　　　⑵ x+2y+2=0;

⑶ x+4y-1=0;　　　　⑷ x-3y=0;

⑸ 2x-6y-9=0

解（1）由5x-y-5=0 得y=5x-5,代入二次曲线方程，得

$$x^2-2x(5x-5)-3(5x-5)^2-4x-6(5x-5)+3=0,$$

整理得

$$-84x^2+126x-42=0,$$

即 $$2x^2-3x+1=0,$$

即 $$(2x-1)(x-1)=0,$$

所以 $$x=\frac{1}{2}\text{或}x=1,$$

所以 $$y=-\frac{5}{2}\text{或}y=0,$$

所以二次曲线与直线的交点为（$\frac{1}{2},-\frac{5}{2}$）与（1，0）；

(2)直线方程可改写成$\begin{cases}x=-2t-2,\\ y=t\end{cases}$

代入二次曲线方程中，得

$$f(-2,1)t^2+2[F_1(-2,0)\times(-2)+F_2(-2,0)\times 1]t+F(-2,0)=0,$$

即 $$5t^2+14t+15=0,$$

得 $$\text{得}t=\frac{-14\pm\sqrt{14^2-300}}{10}=\frac{-7\pm\sqrt{26}i}{5},$$

从而得二次曲线与直线的交点为

$$(\frac{4-2\sqrt{26}i}{5},\frac{-7+\sqrt{26}i}{5})\text{ 与 }(\frac{4+2\sqrt{26}i}{5},\frac{-7-\sqrt{26}i}{5});$$

(3)直线方程可改写成

$$\begin{cases}x=1-4t,\\ y=t\end{cases}$$

所以 $X=-4, Y=1, x_0=1, y_0=0,$

所以$f(X,Y)=4^2+8-3=21$，$F_1(x_0,y_0)=-1, F_2(x_0,y_0)=-4, F(x_0,y_0)=0,$ 将直线方程代入二次曲线方程中，得

$$21t^2+2(4-4)t+0=0,$$

$$t=0,\text{（二重根）}$$

所以二次曲线与直线的交点为（1,0）,(二重交点);

(4) 直线方程可改写成

$$\begin{cases} x = 3t, \\ y = t \end{cases}$$

则 $X=3, Y=1, x_0 = y_0 = 0,$

所以 $f(X, Y)=0$，$F_1(x_0, y_0) = -2, F_2(x_0, y_0) = -3, F(x_0, y_0) = 3,$

所以得方程

$$2(6-3)t + 3 = 0,$$

得

$$t = \frac{1}{6},$$

所以二次曲线与直线的交点为（$\frac{1}{2}, \frac{1}{6}$）；

(5) 直线方程可改写成

$$\begin{cases} x = 3t, \\ y = -\frac{3}{2} + t \end{cases}$$

所以 $X=3, Y=1, x_0 = 0$，$y_0 = -\frac{3}{2},$

所以 $f(X, Y)=0$，$F_1(x_0, y_0) = -\frac{1}{2}, F_2(x_0, y_0) = \frac{3}{2}, F(x_0, y_0) = \frac{21}{4},$

所以得方程

$$2(\frac{3}{2} + \frac{3}{2})t + \frac{21}{4} = 0,$$

即

$$\frac{21}{4}=0，矛盾！$$

所以二次曲线与直线无交点；

3. 求直线 $x - y - 1 = 0$ 与二次曲线 $2x^2 - xy - y^2 - x - 2y = 0$ 的交点

解　直线方程可改写为 $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \end{cases}$,

所以 $X = Y = 1, x_0 = 1, y_0 = 0,$

所以 $f(1, 1)=0, F_1(1,0) = \frac{3}{2}, F_2(1,0) = -\frac{3}{2}, F(1,0) = 0,$

所以得方程

$$0=0$$

此为恒等式. 从而直线落在二次曲线上，所以直线上的每一点都是直线与二次曲线的交点

4.试决定k的值，使得

(1)直线$x-y+5=0$与二次曲线$x^2-3x+y+k=0$交与两个不同的实点；

(2)直线$\begin{cases}x=1+kt\\y=k+t\end{cases}$,与二次曲线$x^2+3y^2-4xy-y=0$交于一点；

(3)直线$x-ky-1=0$与二次曲线$y^2-2xy-(k-1)y-1=0$交于两个相互重合的定点;

(4)直线$\begin{cases}x=1+t\\y=1-t\end{cases}$,与二次曲线$2x^2+4xy+ky^2-x-2y=0$有两个共轭虚交点

解 （1）由 x - y +5=0 得 y=x+5,代入二次曲线方程得

$$x^2-3x+(x+5)+k=0$$

即 $x^2-2x+5+k=0$,

因为直线与二次曲线交与不同的实点，所以有

得 k<-4;

(2)将 x=1+kt, y=k +t 带入二次曲线方程中，得

$$(1+kt)^2+3(k+t)^2-4(1+kt)-(k+t)=0$$

即 $(k^2+3-4k)t^2+(2k+6k-4k^2-4-1)t+1+3k-4k-k=0$,

即 $(k^2-4k+3)t^2-(4k^2+8k-5)t+3k^2-5k+1=0$,

因为直线与二次曲线交于一点，所以

$$k^2-4k+3=0,$$

即 (k-1)(k-3)=0,

得 k=1 或 k=3;

解(3)将x=1+ky代入二次曲线方程得

$$y^2-2(1+ky)y-(k-1)y-1=0,$$

即 $(1-2k)y^2-(k+1)y-1=0$,

因为直线与二次曲线交于两个相互重合的点，所以有

$$1-2k ¹ 0且D=(k+1)^2+4(1-2k)=0,$$

即 $k ¹ \frac{1}{2}且k^2-6k+5=0'$

所以得 k=1或k=5;

(4)将$x = 1+t, y = 1-t$代入二次曲线方程中得

$$2(1+t)^2 + 4(1+t)(1-t) + k(1-t)^2 - (1+t) - 2(1-t) = 0,$$

即 $(k-2)t^2 + (4-2k-1)t + 6 + k - 3 = 0,$

即 $(k-2)t^2 - (2k-5)t + k + 3 = 0,$

因为直线与二次曲线交于两个虚交点，所以有

$k-2$ ¹ 0且D =（2k−5）^{2} − 4(k − 2)(k + 3)< 0,

即 k ¹ 2 且−24k+49<0, k ¹ 2D =（2k−5）^{2} − 4(k − 2)(k + 3)< 0,

得 $$k>\frac{49}{24}$$

5.求二次曲线$2xy-4x-2y+3=0$.的渐近方向，并指出曲线是属于何种类型的曲线.

解 由$\Phi(X,Y)=2XY=0$得

$$X:Y=1:0或X:Y=0:1,$$

因为 $$I_2=-1<0,$$

所以该二次曲线的渐近方向为 1:0 与 0:1，是双曲型曲线

6.求下列二次曲线的中心；

(1)$9x^2-30xy+25y^2+8x-15y=0$

(2)$4x^2-4xy+y^2+4x-2y=0.$

解

（1）设$C(x_0,y_0)$为二次曲线的中心，则有

$$\begin{cases} 9x_0-15y_0+4=0, \\ -15x_0+25y_0-\dfrac{15}{2}=0 \end{cases}$$

由于$I_2=a_{11}a_{22}-a_{12}^2=9\cdot 25-15^2=0$且

$$\frac{a_{11}}{a_{12}}\neq\frac{a_{13}}{a_{23}},$$

所以方程组无解，从而二次曲线没有中心；

（2）设$C(x_0,y_0)$为二次曲线的中心，则有

$$\begin{cases} 4x_0-2y_0+2=0, \\ -2x_0+y_0-1=0 \end{cases}$$

实际上方程组就是方程

$$2x_0 - y_0 + 1 = 0,$$

从而$2x - y + 1 = 0$直线上的点都是二次曲线的中心.

7. 当a,b满足什么条件时，二次曲线$x^2 + 6xy + ay^2 + 3x + by - 4 = 0$

（1） 有唯一的中心；（2）没有中心；（3）有一条中心直线.

解 $I_2 = a - 9.$

（1）当$I_2 \neq 0$即$a \neq 9$时，二次曲线有唯一的中心；

（2）当$I_2 = 0$即$a = 9$时，且

$$\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{1}{3} \neq \frac{a_{13}}{a_{23}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{6}{2}} = \frac{3}{b},$$

即$b \neq 9$时，二次曲线没有中心；

（3）由（1），（2）知当$a = 9, b = 9$时，二次曲线有一条中心直线.

8.求二次曲线$x^2 - 3xy + 2y^2 + x - 3y + 4 = 0$的渐近线.

解 设$C(x_0, y_0)$为二次曲线的中心，则有

$$\begin{cases} x_0 - \dfrac{3}{2}y_0 + \dfrac{1}{2} = 0, \\ -\dfrac{3}{2}x_0 + 2y_0 - \dfrac{3}{2} = 0 \end{cases}$$

解得 $x_0 = -5, y_0 = -3,$

渐近线方程为

$$(x+5)^2 - 3(x+5)(y+3) + 2(y+3)^2 = 0,$$

即 $$\left[(x+5) - 2(y+3)\right]\left[(x+5) - (y+3)\right] = 0,$$

所以 $$x - 2y - 1 = 0 \text{或} x - y + 2 = 0,$$

从而渐近线方程为 $$x - 2y - 1 = 0 \text{与} x - y + 2 = 0.$$

9. 试求曲线 $3x^2 + 10xy + 7y^2 + 4x + 2y + 1 = 0$的渐近线.

解: 求曲线的中心，解中心方程组

$$\begin{cases} 3x+5y+2=0, \\ 5x+7y+1=0, \end{cases}$$

解得 $x=\frac{9}{4}, y=-\frac{7}{4}$, 所以中心为（$\frac{9}{4},-\frac{7}{4}$）；再求渐近方向，由

$$3X^2+10XY+7Y^2=0,$$

即 $(3X+7Y)(X+Y)=0,$

得渐近方向为 $X_1:Y_1=7:(-3)$ 或 $X_2:Y_2=1:(-1).$

所以所求的渐近线为

$$\frac{x-\frac{9}{4}}{7}=\frac{y+\frac{7}{4}}{-3} \text{ 与 } \frac{x-\frac{9}{4}}{1}=\frac{y+\frac{7}{4}}{-1},$$

即 $6x+14y+11=0$ 与 $2x+2y-1=0.$

10．求通过点 $(1,1),(2,1),(-1,-2)$ 且以直线 x+y-1=0 为渐进线的曲线方程。

解 以直线 x+y—1=0 为渐进线的二次曲线可以写成

$$(x+y-1)(Ax+By+C)+D=0$$

又因为点 $(1,1),(2,1),(-1,-2)$ 都在二次曲线上，

所以有 $A+B+C+D=0$,

$$2(2A+B+C)+D=0$$
$$-4(-A-2B+C)+D=0$$

②-①得 $3A+B+C=0,$

③-①得 $3A+7B-5C=0,$

由④，⑤得 $A:B:C=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 7 & -5\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}1 & 3\\ -5 & 3\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}3 & 1\\ 3 & 7\end{vmatrix}$
$=(-2):3:3$

将上式代入①可得

$$A:B:C=2:(-3):(-3):4 \quad .$$

所以求二次曲线为 $(x+y-1)(2x-3y-3)+4=0$ ，

即 $2x^2-xy-3y^2-5x+7=0$.

11. 曲线$x^2+xy+y^2+x+4y+3=0$经过点$(-2,-1)$处的切线方程.

解 因为F（－2，－1）＝4＋2＋1－2－4＋3＝4，

所以点（－2，－1）不在曲线上，设过点（－2，－1）的直线方程为

$$\begin{cases} X=-2+Xt, \\ Y=-1+Yt, \end{cases}$$

t为参数,X:Y为直线的方向.

又因为 $$F_1(-2,-1)=(-2)+\frac{1}{2}\bullet(-1)+\frac{1}{2}=-2,$$

$$F_2(-2,-1)=\frac{1}{2}\bullet(-2)+(-1)+2=0,$$

所以根据直线与二次曲线相切的条件得

$$(-2X)^2-4(X^2+XY+Y^2)=0,$$

即 $$(X+Y)Y=0,$$

所以 $$X:Y=1:(-1)\text{或}X:Y=1:0,$$

显然1:(－1)与1:0都不是已知二次曲线的渐进方向.

所以切线方向为

$$x+y+3=0\text{与}y+1=0.$$

12. 曲线$5x^2+6xy+5y^2=8$经过点$(0,2\sqrt{2})$处的切线方程.

解 设过点（0,2, $2\sqrt{2}$）的切线与已知二次曲线相切于点（x_0,y_0）,那么切线方程为

$$5x_0x+3(x_0y+y_0x)+5yy_0-8=0,$$

即 $$(5x_0+3y_0)x+(3x_0+5y_0)y-8=0,$$

因为它通过点（0, $2\sqrt{2}$）,所以（0, $2\sqrt{2}$）满足上述方程，将（0, $2\sqrt{2}$）代入方程化简得

$$3x_0+5y_0-2\sqrt{2}=0, \qquad ①$$

另一方面，（x_0,y_0）在二次曲线上,所以有

$$5x_0^2+6x_0y_0+5y_0^2=8 \qquad ②$$

联立①,②得切点坐标为

$$\begin{cases} x_0=-\sqrt{2} \\ y_0=\sqrt{2} \end{cases} \quad\text{与}\quad \begin{cases} x_0=\sqrt{2} \\ y_0=-\frac{\sqrt{2}}{5} \end{cases}$$

从而切线方程为

$$-2\sqrt{2}x+2\sqrt{2}y-8=0 \text{ 与 } 11x+5y-10\sqrt{2}=0,$$

即
$$x-y+2\sqrt{2}=0 \text{ 与 } 11x+5y-10\sqrt{2}=0.$$

13. 曲线 $2x^2-xy-y^2-x-2y-1=0$ 经过点 $(0,2)$ 处的切线方程.

解 设过点 $(0,2)$ 的切线与已知二次曲线相切与点（x_0, y_0），那么切线方程为

$$2x_0x-\frac{1}{2}(x_0y+y_0x)-y_0y-\frac{1}{2}(x+x)-(y+y_0)-1=0,$$

即
$$(2x_0-\frac{1}{2}y_0-\frac{1}{2})x-(\frac{1}{2}x_0+y_0+1)y-\frac{1}{2}x_0-y_0-1=0,$$

因为切线通过点（0, 2），所以

$$-2(\frac{1}{2}x_0+y_0+1)-\frac{1}{2}x_0-y_0-1=0,$$

即
$$x_0+2y_0+2=0, \qquad ①$$

因为点（x_0, y_0）在二次曲线上，所以又有

$$2x_0^2-x_0y_0-y_0^2-x_0-2y_0-1=0, \qquad ②$$

联立①，②得切点坐标为

$$\begin{cases} x_0=0, \\ y_0=-1 \end{cases}$$

而 $(0,-1)$ 为二次曲线的奇异点，从而经过点 $(0,-1)$ 的任意直线都为二次曲线的切线，又因为切点经过点 $(0,2)$，所以过点（0, 2）的切线方程为

$$x=0.$$

14.求二次曲线 $F(x,y)=x^2-xy+y^2+2x-4y-3=0$ 在点（2,1）处的切线与法线方程.

解 因为 $F(2,1)=0$，所以点（2,1）为曲线上的点，

而 $F_1(x,y)=x-\frac{1}{2}y+1,\ F_2(x,y)=-\frac{1}{2}x+y-2,$

所以 $F_1(2,1)=\frac{5}{2}, F_2(2,1)=-2,$

因为点（2,1）为二次曲线的正常点，从而切线的方程为

$$\frac{5}{2}(x-2)-2(y-1)=0,$$

即 $5x-4y-6=0,$

在直角坐标系下，法线的方程为

$$2(x-2)+\frac{5}{2}(y-1)=0,$$

即 $\quad 4x+5y-13=0$.

15. 试求椭圆的两条垂直相交的切线交点的轨迹。

解: 设椭圆方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

并设具有斜率为 k 的切线为

$$y=kx+c, \qquad ①$$

代入椭圆方程得 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{(kx+c)^2}{b^2}=1,$

即（$b^2+a^2k^2$）$x^2+2cka^2x+a^2c^2-a^2b^2=0$

因为直线①与椭圆相切，所以有

$$\Delta=(2cka^2)^2-4(b^2+a^2k^2)(a^2c^2-b^2a^2)=0$$

解得 $\quad c^2=a^2k^2+b^2,$

即 $\quad c=\pm\sqrt{a^2k^2+\mathrm{b}^2},$

所以切线方程为

$$y=kx\pm\sqrt{a^2k^2+\mathrm{b}^2}, \qquad ②$$

与它垂直的切线的斜率为 $k'=-\frac{1}{k}$, 它的方程为

$$y=-\frac{1}{k}x\pm\sqrt{\frac{a^2}{k^2}+\mathrm{b}^2}, \qquad ③$$

由②，③得

$$y-kx=\pm\sqrt{a^2k^2+\mathrm{b}^2}, \qquad ④$$

$$ky+x=\pm\sqrt{a^2+k^2\mathrm{b}^2}, \qquad ⑤$$

④的平方+⑤的平方得

$$(1+k^2)(x^2+y^2)=(1+k^2)(a^2+b^2),$$

所以 $\quad x^2+y^2=a^2+b^2$,

所以所求轨迹为

$$x^2+y^2=a^2+b^2,$$

这是一个圆，圆心在原点，即椭圆的中心，半径为$\sqrt{a^2+b^2}$.

注　当切线是垂直于x轴时，认为$k=+\infty$, 则$\frac{1}{k}=0$; 如果切线垂直于y轴时，为$k=0$, 而$\frac{1}{k}=+\infty$，或者把两种情况单独拿出来讨论，发现其切线方程也满足所求的轨迹方程.

16. 求曲线$x^2+xy+y^2=0$的切线平行于Y坐标轴的切线方程及切点的坐标.

解　切线平行于x轴时，设切线方程为$y-a=0$ 即$y=a$, 代入二次曲线方程得

$$x^2+ax+a^2-3=0,$$

所以

$$\triangle=a^2-(a^2-3)=0,$$

即

$$3a^2-12=0,$$

得

$$a=\pm 2$$

当$a=2$时，有$x^2+2x+1=0$，则$x=-1$；

当$a=-2$时，有$x^2-2x+1=0$，则$x=1$.

从而切线方程为

$$y-2=0 \text{ 与 } y+2=0,$$

两切线的切点分别为$(-1,2),(1,-2)$；

当切线平行于y轴时，设切线方程为$x-a=0$即$x=a$，同（i）可得切线方程为

$$x-2=0 \text{ 与 } x+2=0,$$

两切线的切点分别为$(2,-1),(-2,1)$.

17．求二次曲线$x^2-2xy+y^2-2x+2y+1=0$的奇异点：

解　设(x_0,y_0)为二次曲线的奇异点，则

$$\begin{cases} F_1(x_0,y_0)=x_0-y_0-1=0 \\ F_2(x_0,y_0)=-x_0+y_0+1=0 \end{cases},$$

上述两个方程一样，而直线$x-y+1=0$在二次曲线上，从而直线$x-y+1=0$上的点都为二次曲线的奇点.

18．试求经过原点且切直线$4x+3y+2=0$于点$(1,-2)$及切直线$x-y-1=0$于点$(0,-1)$的二次曲线方程.

解　设所求的二次曲线方程为

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y=0 \quad ,$$

从而$F_1(1,-2)=a_{11}-2a_{12}+a_{13}$，$F_2(1,-2)=a_{12}-2a_{22}+2a_{23}$，$F_3(1,-2)=a_{13}-2a_{23}$，

从而切线方程为

$$(x-1)F_1(1,-2)+(y+2)F_2(1,-2)=0\text{，}$$

即 $$x\bullet F_1(1,-2)+y\bullet F_2(1,-2)+2F_2(1,-2)-F_1(1,-2)=0\text{，} \qquad ①$$

因为 $F(1,-2)=0$，所以

$$2F_2(1,-2)-F_1(1,-2)=F_3(1,-2)\text{，}$$

从而①式变成

$$x\bullet F_1(1,-2)+y\bullet F_2(1,-2)+F_3(1,-2)=0\text{，} \qquad ②$$

因为②式即为直线 $4x+3y+2=0$，所以有

$$\frac{F_1(1,-2)}{4}=\frac{F_2(1,-2)}{3=}\frac{F_3(1,-2)}{2}\text{，}$$

即
$$\begin{cases} a_{11}-2a_{12}+a_{13}=4k\text{，} & ③\\ a_{12}-2a_{22}+a_{23}=3k\text{，} & ④\\ a_{13}-2a_{23}=2k & ⑤\end{cases}$$

又因为 $F_1(0,-1)=-a_{12}+a_{13}$， $F_2(0,-1)=-a_{22}+a_{23}$， $F_3(0,-1)=-a_{23}$ 从而过 $(0,-1)$ 的切线方程为

$$xF_1(0,-1)+yF_2(0,-1)+F_3(0,-1)=0\text{，}$$

与直线 $x-y-1=0$ 比较之，有

$$\begin{cases} -a_{12}+a_{13}=\lambda\text{，} & ⑥\\ -a_{22}+a_{23}=-\lambda\text{，} & ⑦\\ -a_{23}=-\lambda & ⑧\end{cases}$$

联立③，④，⑤，⑥，⑦，⑧得

$$a_{11}:a_{12}:a_{22}:a_{23}=(-12):(-3):2:(-2):1\text{，}$$

所以所求二次曲线方程为

$$-12x^2-6xy+2y^2-4x+2y=0\text{，}$$

即 $$6x^2+3xy-y^2+2x-y=0\text{.}$$

19．设有共焦点的曲线族 $\dfrac{x^2}{a^2+h}+\dfrac{y^2}{b^2+h}=1$，这里 h 是一个变动的参数，作平行于已

知直线 $y = mx$ 的曲线的切线，求这些切线切点的轨迹方程.

解　与直线 $y = mx$ 平行的直线方程为

$$y = mx + h\text{，}$$

代入曲线方程中，得

$$\frac{x^2}{a^2+h}+\frac{(mx+h)^2}{b^2+h}=1\text{，}$$

所以

$$\left(\frac{1}{a^2+h}+\frac{m^2}{b^2+h}\right)x^2+\frac{2m\lambda}{b^2+h}x+\frac{\lambda^2}{b^2+h}-1=0\text{，}$$

因为直线 $y = mx + \lambda$ 与二次曲线相切，所以有

$$\Delta=\left(\frac{2m\lambda}{b^2+h}\right)^2-4\left(\frac{1}{a^2+h}+\frac{m^2}{b^2+h}\right)\left(\frac{\lambda^2}{b^2+h}-1\right)=0\text{，}$$

即

$$\frac{1}{a^2+h}+\frac{m^2}{b^2+h}-\frac{\lambda^2}{(a^2+h)(b^2+h)}=0\text{，}$$

从而

$$\lambda^2=(b^2+h)+(a^2+h)m^2\text{，}\qquad ①$$

而切点坐标为

$$x_0=-\frac{m\lambda}{b^2+h}\left(\frac{1}{\frac{1}{a^2+h}+\frac{m^2}{b^2+h}}\right)$$

$$=-\frac{m\lambda(a^2+h)}{(b^2+h)+(a^2+h)m^2}\text{，}$$

$$y_0=mx_0+\lambda\text{，}$$

所以 $\lambda=y_0-mx_0$，且 $\lambda x_0=-\dfrac{m(a^2+h)\lambda^2}{(b^2+h)+(a^2+h)m^2}=-m(a^2+h)$，

所以

$$(y_0-mx_0)x_0=-m(a^2+h)\text{，}$$

另一方面由①得

$$\lambda^2=b^2+a^2m^2+h(1+m^2)=(y_0-mx_0)^2\text{，}$$

所以得

$$h=\frac{(y_0-mx_0)^2-b^2-a^2m^2}{1+m^2}\text{，}$$

代入②式，整理得

$$m{x_0}^2+(m^2-1)x_0y_0-m{y_0}^2-m(a^2-b^2)=0\text{，}$$

所以这些切线切点的轨迹方程为

$$mx^2+(m^2-1)xy-my^2-m(a^2-b^2)=0\,.$$

20．求二次曲线 $3x^2+7xy+5y^2+4x+5y+1=0$ 直线 $x+y+1=0$ 平行的弦的中点轨迹.

解　因为平行弦的方向为 $1:(-1)$，所以与 $x+y+1=0$ 平行的弦的中点轨迹方程为

$$3x+\frac{7}{2}y+2-(\frac{7}{2}x+5y+\frac{5}{2})=0\,,$$

即

$$x+3y+1=0\,.$$

21.求通过点（1，-1）且两直线 $2x+3y-5=0$ 与 $5x+3y-8=0$ 为其渐近线的二次曲线的方程.

解：　设以两直线 $2x+3y-5=0$ 与 $5x+3y-8=0$ 为渐近线的二次曲线为 $(2x+3y-5)(5x+3y-8)+\lambda=0$,

观察这个二次曲线方程可知它的渐近线为 $2x+3y-5=0$ 与 $5x+3y-8=0$, 故可知此假设，它通过点（1，-1），该点坐标满足方程，将（1，-1）代入得

$$\lambda=-36$$

所以所求二次曲线为

$$(2x+3y-5)(5x+3y-8)-36=0,$$

即

$$10x^2+21xy+9y^2-41x-39y+4=0.$$

22.求通过点（3，-3），（3，-7）且以两直线 $x-y-10=0$ 与 $x+y+6=0$ 为一对共轭直径的二次曲线的方程.

解　设所求的二次曲线为

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0, \qquad ①$$

因为它通过点（3，-3），（3，-7），所以有

$$9a_{11}-18a_{12}+9a_{22}+6a_{13}-6a_{23}+a_{33}=0, \qquad ②$$

$$9a_{11}-42a_{12}+49a_{22}+6a_{13}-14a_{23}+a_{33}=0, \qquad ③$$

两共轭直经的交点（2，-8）即为二次曲线的中心，所以它满足中心方程组，因此有

$$2a_{11}-8a_{12}+a_{13}=0, \qquad ④$$

$$2a_{12}-8a_{22}+a_{23}=0, \qquad ⑤$$

又因为两直径的方向为

$$X_1：Y_1=1：1，X_2：Y_2=1：(-1),$$

为一对共轭方向，所以有　$a_{11}-a_{22}=0$,　⑥

由 ②，③，④，⑤，⑥解得

$$a_{11}：a_{12}：a_{22}：a_{13}：a_{23}：a_{33}= 1：(-3)：1：(-26)：14:168,$$

所以所求的二次曲线为 $x^2-6xy+y^2-52x+28y+168=0$

23．求曲线 $x^2+2y^2-4x-2y-6=0$ 通过点 $(8,0)$ 的共轭直径方程.

解　$F_1(x,y)=x-2$，$F_2(x,y)=2y-1$.

所以共轭于渐近方向 $X:Y$ 的直径方程为

$$X(x-2)+Y(2y-1)=0\,,$$

因为直径过点 $(8,0)$，所以有

$$6X-Y=0,$$

即 $$X:Y=1:6,$$

而 $\Phi(1,6)\neq 0$，所以 $1:6$ 是曲线的非渐近方向，所以所求直径方程为

$$x-2+6(2y-1)=0,$$

即 $$x+12y-8=0.$$

设其共轭直径的方向为 $X':Y'$，则有

$$XX'+2YY'=0,$$

所以有 $$X':Y'=12:(-1),$$

所以共轭直径的方程为

$$12(x-2)-(2y-1)=0,$$

即 $$12x-2y-23=0.$$

24．已知抛物线 $y^2=-8x$，通过点 $(-1,1)$ 引一弦，使它在这点被平分.

解 设过点 $(-1,1)$ 的直线方程为

$$\begin{cases} x=-1+Xt \\ y=1+Yt \end{cases},$$

代入抛物线方程，得

$$(1+Yt)^2=-(8-1+Xt),$$

即 $$Y^2t^2+(2Y+8X)t-7=0,$$

因为弦被点 $(-1,1)$ 平分，所以有

$$t_1+t_2=0,$$

所以 $$2Y+8X=0,$$

得 $$X:Y=1:(-4),$$

所以弦的方程为

$$\begin{cases} x=-1+t, \\ y=1-4t \end{cases}$$

即 $$4x+y+3=0.$$

25．求双曲线 $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{4}=1$ 的一对共轭直径 12 方程，已知两共轭直径间的角是 45^0.

解 $F_1(x,y)=\frac{x}{6}$ ，$F_2(x,y)=-\frac{y}{4}$.

设一对共轭直径方程分别为

$$F_1(x,y)+kF_2(x,y)=0,$$

$$F_1(x,y)+k'F_2(x,y)=0,$$

即

$$2x-3ky=0,$$

$$2x-3k'y=0,$$

由 $a_{22}kk'+a_{12}(k+k')+a_{11}=0$ 得

$$-\frac{kk'}{4}+\frac{1}{6}=0,$$

所以有

$$3kk'=2,$$

因为两直径的角为 45^0，所以有

$$\text{Cos}45^0=\pm\frac{3k\cdot 3k'+2\cdot 2}{\sqrt{(3k)^2}+4\sqrt{(3k')^2+4}},$$

即

$$\frac{1}{2}(9k^2+4)(9k'^2+4)=(4+9kk')^2,$$

即

$$81(kk')^2+36(k^2+k'^2)+16=32+144kk'+162(kk')^2,$$

则

$$81(kk')^2+72kk'+16=36(k-k')^2,$$

即

$$(9kk'+4)^2=36(k-k')^2,$$

所以

$$9kk'+4=\pm 6(k-k')^2,$$

因为 $3kk'=2$，所以

$$k-k'=\pm\frac{5}{3},$$

所以有

$$3(k'\pm\frac{5}{3})k'=2,$$

即

$$k'^2\pm\frac{5}{3}k'-\frac{2}{3}=0,$$

所以

$$(k'\mp\frac{1}{3})(k'\pm 2)=0,$$

所以

$$k'=\pm\frac{1}{3}\text{或}k'=\mp 2,$$

从而

$$k=\pm 2\text{ 或 }k=\mp\frac{1}{3},$$

所以所求一对共轭直径方程为

$$2x-6y=0\text{与}2x-y=0,$$

即

$$x-3y=0\text{与}2x-y=0,$$

或

$$2x+6y=0\text{与}2x+y=0,$$

即

$$x+3y=0\text{与}2x+y=0.$$

26．已知二次曲线通过原点，并且以下列两对直线

$\begin{cases} x-3y-2=0 \\ 5x-5y-4=0 \end{cases}$与$\begin{cases} 5y+3=0 \\ 2x-y-1=0 \end{cases}$，为它的两对共轭直径，求这二次曲线的方程.

解　设所求二次曲线方程为

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y=0,$$

则
$$F_1(x,y)=a_{11}x+a_{12}y+a_{13},F_2(x,y)=a_{12}x+a_{22}y+a_{23},$$

由
$$\begin{cases} x-3y-2=0 \\ 5x-5y-4=0 \end{cases},$$

求得中心坐标为$(\frac{1}{5},-\frac{3}{5})$，所以有

$$\begin{cases} \frac{a_{11}}{5}-\frac{3}{5}a_{12}+a_{13}=0 , & ① \\ \frac{a_{12}}{5}-\frac{3}{5}a_{22}+a_{23}=0 & ② \end{cases}$$

因为直线$x-3y-2=0$与$5x-5y-4=0$的方向分别为$3:1$，$1:1$，且为共轭方向，所以

$$3a_{11}+4a_{12}+a_{22}=0, \tag{③}$$

而直线$5y+3=0$与$2x-y-1=0$的方向分别为$1:0$，$1:2$，且为共轭方向，所以

$$a_{11}+2a_{12}=0, \tag{④}$$

由①，②，③，④解得

$$a_{11}:a_{12}:a_{22}:a_{13}:a_{23}=(-2):1:2:1:1,$$

所以所求二次曲线方程为

$$-2x^2+2xy+2y^2+2x+2y=0.$$

即
$$x^2-xy-y^2-x-y=0.$$

27．求双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的主直径.

解　双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的主直径方向与主直径.

因为$I_1\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}$，$I_2=\begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} \end{vmatrix}=-\frac{1}{a^2b^2}\neq 0$，

所以二次曲线为中心曲线，它的特征方程为

$$\lambda^2-(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2})\ \lambda-\frac{1}{a^2b^2}=0.$$

解得两特征根为 $\lambda_1=\frac{1}{a^2}$， $\lambda_2=-\frac{1}{b^2}$.

求出由 $\lambda_1=\frac{1}{a^2}$ 确定的主方向为

$$X_1:Y_1=-(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}):0=1:0,$$

由 $\lambda_2=-\frac{1}{b^2}$ 确定的主方向为

$$X_2:Y_2=0:(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2})=0:1,$$

又因为 $F_1=\frac{x}{a^2},F_2=-\frac{y}{b^2}$，

所以双曲线的主直径为

$$x=0与y=0;$$

28. 求椭圆 $\frac{x}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的主直径.

解　椭圆 $\frac{x}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的主直径

因为 $I_1=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$， $\begin{vmatrix}\frac{1}{a^2} & 0\\ 0 & \frac{1}{b^2}\end{vmatrix}=\frac{1}{a^2b^2}\neq 0$，

所以二次曲线为中心曲线,它的特征方程为

$$\lambda^2-(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2})\ \lambda+\frac{1}{a^2b^2}=0,$$

解得两特征根 $\lambda_1=\frac{1}{a^2}$， $\lambda_2=\frac{1}{b^2}$.

当 $\lambda_1=\frac{1}{a^2}$ 时，有

$$\begin{cases}\frac{1}{a^2}X=\frac{1}{a^2}X\\ \frac{1}{b^2}Y=\frac{1}{a^2}Y\end{cases},$$

因为 $a^2\neq b^2$，所以 Y=0，所以由 $\lambda_1=\frac{1}{a^2}$ 确定的主方向为

$$X_1:Y_1=1:0,$$

同样可求出由 $\lambda_2=\frac{1}{b^2}$ 确定的主方向为

$$X_2 : Y_2 = 0 : 1,$$

又因为$F_1(x,y)=\dfrac{x}{a^2}$，$F_2(x，y)=\dfrac{y}{b^2}$，所以椭圆的主直径为

$x=0$与$y=0$.

29.求抛物线$y^2=2px$的主方向.

解　抛物线的主方向

抛物线的方程可改写成　　　$2px-y^2=0$，

所以$I_1=-1, I_2=\begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix}=0$,所以抛物线为非中心二次曲线，它的特征方程为

$$\lambda^2+\lambda=0,$$

解得两特征根为　　　　$\lambda_1=\text{-}1, \lambda_2=0$.

由$\lambda_1=-1$确定的主方向即为飞渐近方向为

$$X_1 : Y_1 = 0 : (0+1) = 0 : 1,$$

由$\lambda_2=0$确定的方向为渐近方向为

$$X_2 : Y_2 = 1 : 0.$$

30. 求二次曲线$5x^2+8xy+5y^2-18x-18y+9=0$的主直径.

解　（1）$I_1=5+5=10$，$I_2=\begin{vmatrix}5 & 4\\ 4 & 5\end{vmatrix}=9\neq 0$,

所以曲线为中心二次曲线，它的特征方程为

$$\lambda^2 \text{-} 10\lambda+9=0.$$

解特征方程组两特征根为

$$\lambda_1=9，\lambda_2=1.$$

特征根$\lambda_1=9$确定的主方向为

$$X_1 : Y_1 = -4 : (5-9) = 1 : 1,$$

特征根$\lambda_2=1$确定的主方向为

$$X_2 : Y_2 = -4 : (5-1) = -1 : 1,$$

又因为$F_1(x,y)=5x+4y-9$，$F_2(x,y)=4x+5y-9$，所以曲线的主直径为

$$5x+4y-9+(4x+5y-9)=0$$

与　$$-(5x+4y-9)+(4x+5y-9)=0,$$

即 $$x+y-2=0 \text{与} x-y=0.$$

31.求二次曲线$2xy-2x+2y-1=0$的主直径.

解 $I_1=0+0=0$，$I_2=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-1\neq 0$，

所以曲线为中心曲线，特征方程为

$$\lambda^2-1=0,$$

解特征方程得两特征根为

$$\lambda_1=1,\ \lambda_{,2}=-1.$$

由特征根$\lambda_1=1$确定的主方向为

$$X_1:Y_1=-1:(0-1)=1:1,$$

由特征根$\lambda_2=-1$确定的主方向为

$$X_2:Y_2=-1:(0+1)=-1:1,$$

又因为$F_1(x,y)=y-1$，$F_2(x,y)=x+1$，

所以曲线的主直径为

$$y-1+(x+1)=0$$
$$\text{与}-(y-1)+(x+1)=0,$$

即 $$x-y=0 \text{与} x-y+2=0.$$

32.求二次曲线$9x^2-24xy+16y^2-18x-101y+19=0$的主方向.

解 $I_1=9+16=25$，$I_2=\begin{vmatrix}9 & -12\\ -12 & 16\end{vmatrix}=0$,

所以曲线为非中心曲线，它的特征方程为

$$\lambda^2-25\lambda=0,$$

因此得两特征根 $\lambda_1=25$，$\lambda_2=0$.

由这两特征根所确定的主方向为

非渐近方向

$$X_1:Y_1=-(-12):(9-25)=3:4,$$

渐近方向

$$X_2:Y_2=-(-12):(9-0)=4:3.$$

33. 求二次曲线$x^2+y^2+4x-2y+1=0$的主方向与主直径.

解　$I_1=1+1=2$，$I_2=\begin{vmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{vmatrix}=1$,

所以曲线为中心曲线，特征方程为

$$\lambda^2-2\lambda+1=0,$$

解得特征根是两重根

$$\lambda_1=\lambda_2=1.$$

从而由特征根对应的主方向为任意方向，从而过中心的人任何直线都是主直径.

34. 直线$x+y+1=0$是二次曲线的主直径（即对称轴），点$(0,0),(1,-1),(2,1)$在曲线上，求这曲线的方程.

解　因为曲线过原点，故可设曲线的方程为

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+a_{13}x+2a_{23}y=0 \quad ①$$

求出点$(0,0),(1,-1),(2,1)$关于直线$x+y+1=0$的对称点.

设点$(0,0)$,的对称点为(x_0,y_0)，因为点$(0,0)$与(x_0,y_0)连接的线段的中点在直线$x+y+1=0$上，且与直线$x+y+1=0$垂直，所以有

$$\frac{x_0}{2}+\frac{y_0}{2}+1=0, \quad ②$$

$$x_0\cdot 1-y_0\cdot 1=0, \quad ③$$

由②，③得　$x_0=-1, y_0=-1$,

所以点$(0,0)$关于直线$x+y+1=0$的对称点为$(-1,-1)$，同样方法可求得$(-1,-1)$，$(2,1)$关于直线$x+y+1=0$的对称点分别为$(0,-2)(-2,-3)$，从而二次曲线经过点$(0,0),(-1,-1)(2,1),(-1,-1),(0,-2)(-2,-3)$, 从而有

$$a_{11}-2a_{12}+a_{22}+2a_{13}-2a_{23}=0, \quad ④$$

$$4a_{11}+4a_{12}+a_{22}+4a_{13}+2a_{23}=0, \quad ⑤$$

$$a_{11}+2a_{12}+a_{22}-2a_{13}-2a_{23}=0, \quad ⑥$$

$$4a_{22}-4a_{23}=0, \quad ⑦$$

$$4a_{11}+12a_{12}+9a_{22}-4a_{13}-6a_{23}=0, \quad ⑧$$

联立④, ⑤, ⑥, ⑦, ⑧解得

$$a_{11}:a_{12}:a_{22}:a_{13}:a_{23}=4:(-\frac{7}{2}):4:(-\frac{7}{2}):4,$$

所以二次曲线的方程为

$$4x^2-7xy+4y^2-7x+8y=0.$$

35. 利用移轴与转轴，化简二次曲线 $5x^2+4xy+2y^2-24x-12y+18=0$ 的方程，并画出它的图形.

解　因为 $I_2=\begin{vmatrix}5 & 2\\ 2 & 2\end{vmatrix}=6\neq 0$，所以曲线为中心二次曲线，解方程组

$$\begin{cases}F_1(x,y)\equiv 5x+2y-12=0\\ F_2(x,y)\equiv 2x+2y-6=0\end{cases},$$

得中心的坐标为 $x=2,y=1,$ 取 $(2,1)$ 为新原点，作移轴

$$\begin{cases}x=x'+2\\ y=y'+1\end{cases},$$

原方程变为

$$5(x'+2)^2+4(x'+2)(y'+1)+2(y'+1)^2-24(x'+2)-12(y'+1)+8=0,$$

即

$$5x'^2+4x'y'+2y'^2-12=0,$$

再转轴消去 $x'y'$ 项，设旋转角为 α，则

$$\cot 2\alpha=\frac{a_{11}-a_{22}}{2a_{12}}=\frac{3}{4},$$

即

$$\frac{1-\tan^2\alpha}{2\tan\alpha}=\frac{3}{4},$$

所以

$$2\tan^2\alpha+3\tan\alpha-2=0,$$

从而得

$$\tan\alpha=\frac{1}{2}\text{ 或 }\tan\alpha=-2,$$

取 $\tan\alpha=\frac{1}{2}$，那么 $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$， $\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$，所以得转轴公式为

$$\begin{cases}x'=\frac{1}{\sqrt{5}}(2x''-y'')\\ y'=\frac{1}{\sqrt{5}}(x''+2y'')\end{cases},$$

经转轴后曲线的方程化为最简形式

$$(2x''-y'')^2+\frac{4}{5}(2x''-y'')(x''+2y'')+\frac{2}{5}(x''+2y'')^2-12=0,$$

即 $$6x''^2+y''^2-12=0,$$

或写成标准形式

$$\frac{x''^2}{2}+\frac{y''^2}{12}=1.$$

这 是 一 个 椭 圆 ， 它 的 图 形 如 图 5.4 所 示 .

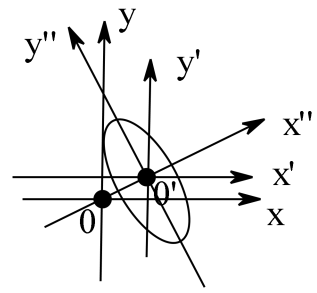


图 5.4

36. 利用移轴与转轴，化简二次曲线 $x^2+2xy+y^2-4x+y-1=0$ 的方程，并画出它的图形.

解 因为 $I_2=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=0$，所以我们可先转轴，再移轴.

$$\cos 2\alpha=\frac{a_{11}-a_{22}}{2a_{12}}=0,$$

从而可取 $\alpha=\frac{\pi}{4}$，故转轴公式为

$$\begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt{2}}(x'-y') \\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y') \end{cases},$$

代入原方程得经转轴后曲线的方程为

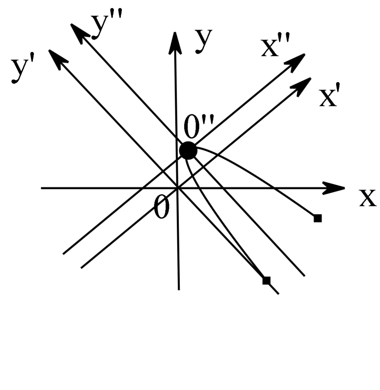
$$\frac{1}{2}(x'-y')^2+(x'-y')(x'+y')+\frac{1}{2}(x'+y')^2-\frac{4}{\sqrt{2}}(x'-y')+\frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y')-1=0,$$

即 $$2x'^2-\frac{3\sqrt{2}}{2}x'+\frac{5\sqrt{2}}{2}y'-1=0,$$

即 $$(x'-\frac{3\sqrt{2}}{8})^2+\frac{5\sqrt{2}}{4}(y'-\frac{5\sqrt{2}}{16})=0,$$

再作移轴

$$\begin{cases} x'=x''+\frac{3\sqrt{2}}{8} \\ y'=y''+\frac{5\sqrt{2}}{16} \end{cases},$$



曲线化为最简形式

$$x''^{2}=-\frac{5\sqrt{2}}{4}y'',$$

这是一条抛物线，它的图形如图 5.5 所示 .　　　　**图 5.5**

37. 利用移轴与转轴，化简二次曲线 $5x^2+12xy-22x-12y-19=0$ 的方程，并画出它的图形.

解　因为 $I_2=\begin{vmatrix}5 & 6\\ 6 & 0\end{vmatrix}=-36\neq 0$，所以曲线为中心二次曲线，解方程组

$$\begin{cases} F_1(x,y)\equiv 5x+6y-11=0 \\ F_2(x,y)\equiv 6x-6=0 \end{cases},$$

得中心的坐标为 $x=1$， $y=1$，取 $(1,1)$ 为新原点，作移轴

$$\begin{cases} x=x'+1 \\ y=y'+1 \end{cases},$$

原方程变为

$$5(x'+1)^2+12(x'+1)(y'+1)-22(x'+1)-12(y'+1)-19=0,$$

即

$$5x'^2+12x'y'\text{-}36=0,$$

再转轴消去 $x'y'$ 项，设旋转角为 α，则

$$\cot 2\alpha=\frac{5-0}{12}=\frac{5}{12},$$

即

$$\frac{1-\tan^2\alpha}{2\tan\alpha}=\frac{5}{12},$$

所以

$$6\tan^{2\alpha}+5\tan\alpha-6=0,$$

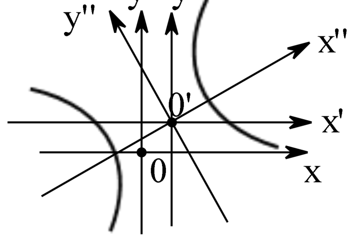
从而得

$$\tan\alpha=\frac{2}{3} \text{ 或 } \tan\alpha=-\frac{3}{2},$$

取 $\tan\alpha=\frac{2}{3}$，则 $\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{13}}$， $\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{13}}$，

所以得转轴公式为

$$\begin{cases} x'=\dfrac{1}{\sqrt{13}}(3x''-2y'') \\ y'=\dfrac{1}{\sqrt{13}}(2x''+3y'') \end{cases},$$



经转轴曲线的方程化为最简形式

$$9x''^2-4y''^2-36=0,$$

或标准形式 $\dfrac{x''^2}{4}-\dfrac{y''^2}{9}=1$，

这是一条双曲线，它的图形如图 5.6 所示.

图 5.6

38. 利用移轴与转轴，化简二次曲线 $x^2+2xy+y^2+2x+2y=0$ 的方程，并画出它的图形.

解　因为 $I_2=\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}=0$，所以先转轴，后移轴

$$\cot 2\alpha=0,$$

从而可取 $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$，故转轴公式为

$$\begin{cases}x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(x'-y')\\ y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(x'+y')\end{cases},$$

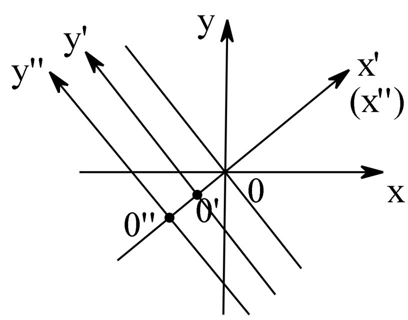
代入原方程，得

$$x'^2+\sqrt{2}x'=0,$$

即
$$(x'+\frac{\sqrt{2}}{2})^2=\frac{1}{2},$$

再作移轴

$$\begin{cases}x'=x''-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\\ y'=y''\end{cases}$$



从而曲线化为最简形式

$$x''^2=\frac{1}{2}\ .$$

图 5.7

这是两条平行直线，它的图形如图 5.7 所示，y' 轴也是所求直线.

39. 以二次曲线的主直径为新坐标轴化简方程 $x^2-4xy-2y^2+10x+4y=0$，并写出相应的坐标变换公式.

解

(2)已知二次曲线的矩阵是

$$\begin{pmatrix}1&-2&5\\-2&-2&2\\5&2&0\end{pmatrix},$$

$$I_1=1-2=-1, I_2=\begin{vmatrix}1 & -2\\ -2 & -2\end{vmatrix}=-6,$$

所以曲线的特征方程是

$$\lambda^2+\lambda-6=0,$$

解的两个特征根为

$$\lambda_1=2，\lambda_2=-3。$$

因而曲线的两个主方向为

$$X_1: Y_1=-2:(2-1)=-2:1,$$
$$X_2: Y_2=-2:(-3-1)=1:2,$$

曲线的两条主直径为

$-2(x-2y+5)+(-2x-2y+2)=0$,

与 $(x-2y+5)+2(-2x-2y+2)=0$,

即 $2x-y+4=0$ 与 $x+2y-3=0$,

取上面两条主直径分别为新坐标系的 x'轴，y'轴，则变换公式为

$$\begin{cases} x'=\dfrac{x+2y-3}{\sqrt{5}} \\ y'=\dfrac{-2x+y-4}{\sqrt{5}} \end{cases},$$

解出 x 与 y 得

$$\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{5}}{5}x'-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}y'-1 \\ y=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}x'+\dfrac{\sqrt{5}}{5}+2 \end{cases},$$

代入已知曲线方程，得到在新坐标系下的方程为

$$3x'^2-2y'^2+1=0$$

或标准形式 $$\frac{y'^2}{\frac{1}{2}}-\frac{x'^2}{\frac{1}{3}}=1$$

它是一条双曲线.

40. 以二次曲线的主直径为新坐标轴化简方程 $4x^2-4xy+y^2+6x-8y+3=0$，

并写出相应的坐标变换公式.

解

$(3)\ I_1=4+1=5, I_2=\begin{vmatrix}4 & -2\\ -2 & 1\end{vmatrix}=0,$

$$I_3=\begin{vmatrix}4 & -2 & 3\\ -2 & 1 & -4\\ 3 & -4 & 3\end{vmatrix}=-25\neq 0,$$

所以曲线为抛物线，其特征方程为

$$\lambda^2-5\lambda=0,$$

两特征根为 $\lambda_1=5$，$\lambda_2=0.$

非零特征根所确定的主方向为

$$X_1: Y_1=2:(4-5)=2:(-1),$$

它是非渐近方向，共轭于它的主直径为

$$2(4x-2y+3)-(-2x+y-4)=0,$$

即 $2x-y+2=0,$

特征根 $\lambda_2=0$所确定的主方向为

$$X_2:Y_2=2:4=1:2,$$

这是渐近方向。

解方程组

$$\begin{cases}4x^2-4xy+y^2+6x-8y+3=0,\\ 2x-y+2=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}(2x-y)^2+6x-8y+3=0,\\ 2x-y+2=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}6x-8y+7=0,\\ 2x-y+2=0\end{cases}$$

的$x=-\frac{9}{10}, y=\frac{1}{5}$，所以抛物线的顶点是$\left(-\frac{9}{10},\frac{1}{5}\right)$，顶切线的方程为

$$\frac{x+\frac{9}{10}}{2}=\frac{y-\frac{1}{5}}{-1},$$

即 $$x+2y+\frac{1}{2}=0.$$

取主直径2x-y+2=0为x'轴，顶切线x+2y+$\frac{1}{2}=0$为y轴，作坐标变换

$$\begin{cases} x'=\dfrac{x+2y+\frac{1}{2}}{\sqrt{5}} \\ y'=-\dfrac{2x-y+2}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

解出 x,y 得

$$\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{5}}{5}x'-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}y'-\dfrac{10}{9}, \\ y=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}x'+\dfrac{\sqrt{5}}{5}y'+\dfrac{1}{5} \end{cases}$$

代入抛物线的原方程，化简整理得抛物线的简化方程为

$$5y'^2-2\sqrt{5}x'=0,$$

它的标准方程为

$$y'^2=\frac{2\sqrt{5}}{5}x'.$$

41. 化简二次曲线方程: $x^2+2xy+y^2+y=0$.

解 已知二次曲线的矩阵是

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$I_1=1+1=2, I_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

曲线为非中心曲线, 它的特征方程为

$$\lambda^2-2\lambda=0,$$

特征根为 $$\lambda_1=2, \lambda_2=0.$$

曲线的非渐进方向为对应于 $\lambda_1=2$ 的主方向

$$X:Y=1:1,$$

所以曲线的主直径为

$$\left(x+y+1\right)+\left(x+y+\frac{1}{2}\right)=0,$$

即
$$x+y+\frac{3}{4}=0.$$

求出主直径与曲线的交点,即曲线的顶点为$\left(\frac{3}{16},-\frac{15}{16}\right)$,所以曲线的顶点且以非渐进主方向为方向的直线为

$$\frac{x-\frac{3}{16}}{1}=\frac{y+\frac{15}{16}}{1}\text{即}x-y-\frac{9}{8}=0,$$

这也是过顶点垂直于主直径的直线,取主直径$x+y+\frac{3}{4}=0$为新坐标系 x’轴，而过

曲线的顶点且垂直于主直径的直线

$$x-y+\frac{9}{8}=0$$

为 y’轴作坐标变换，它的变换公式为

$$\begin{cases} x'=\dfrac{x-y+\frac{9}{8}}{\sqrt{2}}, \\ y'=\dfrac{x+y+\frac{3}{4}}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

解出 x 与 y，

$$\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x'+\dfrac{\sqrt{2}}{2}y'+\dfrac{3}{16}, \\ y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x'+\dfrac{\sqrt{2}}{2}y'-\dfrac{15}{16} \end{cases}$$

代入已知方程，经过整理得
$$2y'+\frac{\sqrt{2}}{2}x'=0,$$

化为标准方程
$$y'^2=-\frac{\sqrt{2}}{4}x',$$

这是一条抛物线.

42. 利用不变量判断二次曲线$x^2-4xy+3y^2+2x-2y=0$为何种曲线,并求出

它的简化方程与标准方程.

解　因为$I_1=1+3$，$I_2=\begin{vmatrix}1 & -2\\ -2 & 3\end{vmatrix}=-1$，$I_3=\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\ -2 & 3 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix}=0$，

所以$\dfrac{I_3}{I_2}=0$，而特征方程为

$$\lambda^2-4\lambda-1=0,$$

两特征根为　$\lambda_1=2+\sqrt{5}$，$\lambda_2=2-\sqrt{5}$.

所以曲线的简化方程为

$$\left(2+\sqrt{5}\right)x^2+\left(2-\sqrt{5}\right)y^2=0,$$

标准方程为　$\dfrac{x^2}{\dfrac{1}{2+\sqrt{5}}}+\dfrac{y^2}{\dfrac{1}{2-\sqrt{5}}}=0.$

所以二次曲线为两相交直线.

43. 利用不变量判断二次曲线$x^2-2xy+2y^2-4x-6y+29=0$为何种曲线，并求出它的简化方程与标准方程.

解　因为$I_1=3$，$I_2=\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=1$，$I_3=\begin{vmatrix}1 & -1 & -2\\ -1 & 2 & -3\\ -2 & -3 & 29\end{vmatrix}=0$，

所以$\dfrac{I_3}{I_2}=0$，而特征方程为

$$\lambda^2-3\lambda+1=0,$$

两特征根为　$\lambda_1=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$，$\lambda_2=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

所以曲线的简化方程为　$\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}x^2+\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}y^2=0$，

标准方程为　$\dfrac{x^2}{3-\sqrt{5}}+\dfrac{y^2}{3+\sqrt{5}}=0.$

此二次曲线为一个点（0,0）.

44. 利用不变量判断二次曲线$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$为何种曲线，并求出它的简化方

程与标准方程.

解　由$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$得

$$x^2-2xy+y^2-2ax+a^2=0 \quad (0\leqslant x\leqslant a,\ 0\leqslant y\leqslant b)$$

则$I_1=2$，$I_2=\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{vmatrix}=0$，$I_3=\begin{vmatrix}1 & -1 & -a\\ -1 & 1 & -a\\ -a & -a & a^2\end{vmatrix}=-4a^2$,

所以曲线的简化方程为　$2y^2-2\sqrt{2a^2}x=0$,

即　$y^2-\sqrt{2}ax=0$,

标准方程为　$y^2=\sqrt{2}ax \quad (0\leqslant x\leqslant a,\ 0\leqslant y\leqslant a)$

所以此二次曲线为抛物线的一部分.

45. 利用不变量判断二次曲线$x^2+2xy+y^2+2x+2y-4=0$为何种曲线，并求出它的简化方程与标准方程.

解　因为$I_1=2$，$I_2=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=0$，$I_3=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -4\end{vmatrix}=0$,

所以曲线为线心曲线，而$K_1=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -4\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -4\end{vmatrix}=-10$,

所以曲线的简化方程为　$2y^2-5=0.$

标准方程为　$y^2=\dfrac{5}{2}.$

故此二次曲线为二平行直线；

46. 利用不变量判断二次曲线$4x^2-4xy+y^2+12x-6y+9=0$为何种曲线，并求出它的简化方程与标准方程.

解　$I_1=5$，$I_2=\begin{vmatrix}4 & -2\\ -2 & 1\end{vmatrix}=0$，$I_3=\begin{vmatrix}4 & -2 & 6\\ -2 & 1 & -3\\ 6 & -3 & 9\end{vmatrix}=0$,

所以二次曲线为线心曲线

$$K_1=\begin{vmatrix}4 & 6\\ 6 & 9\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & -3\\ -3 & 9\end{vmatrix}=0,$$

所以曲线的简化方程为　$5y^2=0$.

标准方程为 $$y^2=0.$$

所以此二次曲线为两重合直线.

47.按λ实数的值讨论方程$\lambda x^2+2xy+\lambda y^2-2x+2y+5=0$表示什么曲线？

解 $I_1=2\lambda$，$I_2=\begin{vmatrix}\lambda & -1\\ -1 & -\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-1=(\lambda+1)(\lambda-1)$,

$$I_3=\begin{vmatrix}\lambda & -1 & -1\\ -1 & \lambda & 1\\ -1 & 1 & 5\end{vmatrix}=(5\lambda+3)(\lambda-1),$$

$$K_1=\begin{vmatrix}\lambda & -1\\ -1 & 5\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\lambda & 1\\ 1 & 5\end{vmatrix}=2(5\lambda-1).$$

当λ的值变化时，I_1，I_2，I_3，K_1与随着变化，它们的关系如下表：

λ	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,-\frac{3}{5})$	$-\frac{3}{5}$	$(-\frac{3}{5},0)$	0	$(0,\frac{1}{5})$	$\frac{1}{5}$	$(\frac{1}{5},1)$	$(1,+\infty)$
I_1	-	-	-	-	-	0	+	+	+	+
I_2	+	0	-	-	-	-	-	-	-	+
I_3	+	+	+	0	-	-	-	-	-	+
K_1	-	-	-	-	-	-	-	0	+	+

从而有

$\lambda<-1$	$I_2>0,I_1,I_3<0$	椭圆
$\lambda=-1$	$I_2=0,I_3\neq 0$	抛物线
$-1<\lambda<-\frac{3}{5}$	$I_2<0,I_3\neq 0$	双曲线
$\lambda=-\frac{3}{5}$	$I_2<0,I_3\neq 0$	一对相交直线
$-\frac{3}{5}<\lambda<1$	$I_2<0,I_3\neq 0$	双曲线
$\lambda=1$	$I_2=2,I_3=0,K_1>0$	一对平行的虚直线
$1<\lambda<+\infty$	$I_2>0,I_1,I_3>0$	虚椭圆

证明题

1.试证明如果二次曲线

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$$

有渐进线，那么它的两渐近方程是

$$\begin{aligned}&\Phi(x-x_0,y-y_0)\\&\equiv a_{11}(x-x_0)^2+2a_{12}(x-x_0)(y-y_0)+a_{22}(y-y_0)^2\\&=0\end{aligned}$$

式中 (x_0,y_0) 为二次曲线的中心.

证明　设 $(x.y)$ 为渐近线上的任意点，由于渐近线经过中心 (x_0,y_0) 所以有

$$X:Y=(x-x_0):(y-y_0),$$

因为 $\Phi(X,Y)=0,$ 所以

$$\Phi(x-x_0,y-y_0)=0$$

而 $\Phi(x-x_0,y-y_0)\equiv a_{11}(x-x_0)^2+2a_{12}(x-x_0)(y-y_0)+a_{22}(y-y_0)^2$

从而

$$\begin{aligned}&\Phi(x-x_0,y-y_0)\\&\equiv a_{11}(x-x_0)^2+2a_{12}(x-x_0)(y-y_0)+a_{22}(y-y_0)^2\\&=0\end{aligned}$$

是渐近线方程.

2. 试证二次曲线成为线心曲线的充要条件是 $I_2=I_3=0,$ 成为无心曲线的充要条件是 $I_2=0,I_3\neq 0.$

证明　我们只要证明线心曲线的充要条件，而无心曲线的充要条件由线心的充要条件即可得到.

充分性　当 $I_2=I_3=0$ 时，即

$$\frac{a_{11}}{a_{12}}=\frac{a_{12}}{a_{22}},\text{且}$$

$$I_3=\begin{vmatrix}a_{11}a_{12}a_{13}\\a_{12}a_{22}a_{23}\\a_{13}a_{23}a_{33}\end{vmatrix}$$

$$=a_{13}(a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22})-a_{23}(a_{11}a_{23}-a_{12}a_{13})+a_{33}(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)=0,$$

因为$I_2=0$,所以

$$I_3=a_{13}a_{12}a_{23}-a_{13}^2a_{22}-a_{11}a_{23}^2+a_{12}a_{13}a_{23}=0,$$

即 $\quad$ a $a_{11}a_{23}^2-2a_{12}a_{13}a_{23}+a_{22}{a_{13}}^2=0$,

即 $\quad \frac{a_{11}}{a_{12}}{a_{23}}^2-2\frac{a_{11}}{a_{22}}a_{13}a_{23}+{a_{13}}^2=0$,

即 $\quad (\frac{a_{11}}{a_{12}})^2{a_{23}}^2-2\frac{a_{11}}{a_{12}}a_{13}a_{23}+{a_{13}}^2=0$,

即 $\quad (\frac{a_{11}}{a_{12}}a_{23}-a_{13})^2=0$,

所以 $\quad \frac{a_{11}}{a_{12}}=\frac{a_{13}}{a_{23}}$,

从而曲线为线心曲线。

必要性　如果曲线为线心曲线，则有

$$\frac{a_{11}}{a_{12}}=\frac{a_{12}}{a_{22}}=\frac{a_{13}}{a_{23}} \quad ,$$

从而可知 $\quad I_2=0$, $I_3=0$.

3．证明以直线$A_1x+By+C_1=0$为渐近线的二次曲线方程总能写成

$$（A_1x+B_1y+C_1)(Ax+By+C)+D=0 \quad .$$

证明　设以$A_1x+By+C_1=0$为渐近线的二次曲线为

$F(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$ 。

它的渐进线为 $\quad \phi（x-x_0,y-y_0)=0$,

其中 (x_0,y_0)为曲线的中心，应为它是关于$x-x_0,y-y_0$的二次齐次式，所以它可以分解为两个一次齐次式之积，从而有

$\phi（x-x_0,y-y_0)=(A_1x+B_1y+C_1)(Ax+By+C)$

而$\phi（x-x_0,y-y_0)=a_{11}(x-x_0)^2+2a_{12}(x-x_0)(y-y_0)+a_{22}(y-y_0)^2$

$=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2-2(a_{11}x_0+a_{12}y_0)x-2(a_{12}x_0+a_{22}y_0)+$

$a_{11}x_0{}^2+2a_{12}x_0y_0+a_{22}y_0{}^2$ ，

因为(x_0,y_0)为曲线中心，所以有

$$a_{11}x_0+a_{12}y_0=-a_{13},a_{12}x_0+a_{22}y_0=-a_{23}$$ ，

因此ϕ（$x-x_0,y-y_0$）$=F(x,y)+\phi(x_0,y_0)-a_{33}$ ，

令 $\phi(x_0,y_0)-a_{33}=-D$ ，代入上式就得

$F(x,y)=\phi(x-x_0,y-y_0)+D$

即 $F(x,y)=$（$A_1x+B_1y+C_1)(Ax+By+C)+D$ ，

所以以$A_1x+B_1y+C_1=0$为渐进线的二次曲线可写成

（$A_1x+B_1y+C_1)(Ax+By+C)+D=0$.

4．试证：通过中心二次曲线中心的直线，一定是中心二次曲线的直径。平行于无心二次曲线渐近方向的直线，一定是无心二次曲线的直径.

证明 先证第一步。设二次曲线的方程为

$$F(x,y)\equiv a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0 .$$

设$F(x,y)=0$为中心二次曲线，设$C(x_0,y_0)$为二次曲线的中心，过中心的直线方程为

$$\begin{cases}x=x_0+Xt,\\ y=y_0+Yt\end{cases}$$

设(x,y)是直线上的点，则有

$$\begin{aligned}&(a_{12}X+a_{22}Y)F_1(x,y)-(a_{11}X+a_{12}Y)F_2(x,y)\\&=(a_{12}X+a_{22}Y)F_1(x_0+Xt,y_0+Yt)-(a_{11}X+a_{12}Y)F_2(x_0+Xt,y_0+Yt)\\&=(a_{12}X+a_{22}Y)\cdot[F_1(x_0,y_0)+a_{11}Xt+a_{12}Yt]-(a_{11}X+a_{12}Y)\cdot[F_2(x_0,y_0)+a_{12}Xt+a_{22}Yt]\\&=(a_{12}X+a_{22}Y)F_1(x_0,y_0)-(a_{11}X+a_{12}Y)F_2(x_0,y_0)\end{aligned}$$

因为$F_1(x_0,y_0)=F_2(x_0,y_0)=0$, 所以有

$$(a_{12}X+a_{22}Y)F_1(x,y)-(a_{11}X+a_{12}Y)F_2(x,y)=0 ， \quad ①$$

因为二次曲线为中心二次曲线，所以$a_{11}a_{22}-a_{12}^2\neq 0$，而$X$，$Y$又不全为零，所以$a_{12}X+a_{22}Y$，$a_{11}X+a_{12}Y$不全为零，而（1）式表示一条直线方程，从而可知过中心的直线是直径。

当二次曲线为无心曲线时，它的渐近方向为$-a_{12}:a_{11}$，所以平行与渐近方向的直线可以写成

$$a_{11}x+a_{12}y+\lambda=0,$$

与无心二次曲线的直径公式比较，并令

$$\lambda = \frac{a_{11}(a_{13}X + a_{23}Y)}{a_{11}X + a_{12}Y},$$

由此解得 $$X:Y = -(a_{11}a_{23} - a_{12}\lambda):a_{11}(a_{13} - \lambda),$$

方向 $X:Y = -(a_{11}a_{23} - a_{12}\lambda):a_{11}(a_{13} - \lambda)$ 一定是非渐近方向，因为如果是渐近方向的话，那么有

$$\frac{-(a_{11}a_{13} - a_{12}\lambda)}{-a_{12}} = \frac{a_{11}(a_{13} - \lambda)}{a_{11}},$$

从而得 $$\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{13}}{a_{23}}$$

与二次曲线是无心曲线的条件 $\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} \neq \frac{a_{13}}{a_{23}}$ 相矛盾！

所以直线 $$a_{11}x + a_{12}y + \lambda = 0$$

为无心二次曲线的共轭于非渐近方向 $-(a_{11}a_{23} - a_{12}\lambda):a_{11}(a_{13} - \lambda)$ 的一条直径.

5．试证明二次曲线两不同特征根确定的主方向相互垂直.

证明 设 $\lambda_1 \neq \lambda_2$, 由它们确定的主方向分别为 $X_1:Y_1$ 与 $X_2:Y_2$, 那么有

$$\begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}Y_1 = \lambda_1 X_1 \\ a_{12}X_1 + a_{22}Y_1 = \lambda_1 Y_1 \end{cases} \quad \text{与} \quad \begin{cases} a_{11}X_2 + a_{12}Y_2 = \lambda_2 X_2 \\ a_{12}X_2 + a_{22}Y_2 = \lambda_2 Y_2 \end{cases},$$

所以 $\lambda_1 X_1 X_2 + \lambda_2 Y_1 Y_2 = (a_{11}X_1 + a_{12}Y_1)X_2 + (a_{12}X_1 + a_{22}Y_1)Y_2$

$$= (a_{11}X_2 + a_{12}Y_2)X_1 + (a_{12}X_2 + a_{22}Y_2)Y_1$$
$$= \lambda_2 X_2 X_1 + \lambda_2 Y_2 Y_1,$$

从而得 $$(\lambda_1 - \lambda_2)(X_1X_2 + Y_1Y_2) = 0,$$

因为 $\lambda_1 \neq \lambda_2$, ，所以 $X_1X_2 + Y_1Y_2 = 0$，

所以两主方向 X_1： Y_1 与 X_2： Y_2 相互垂直.

6. 试证中心二次曲线 $ax^2 + 2hxy + ay^2 = d$ 的两条主直径为 $x^2 - y^2 = 0$, 曲线的两半轴的长分别是 $\sqrt{\left|\frac{d}{a+h}\right|}$ 及 $\sqrt{\left|\frac{d}{a-h}\right|}$.

证明 $I_1 = 2a, I_2 = \begin{vmatrix} a & h \\ h & a \end{vmatrix} = a^2 - h^2 \neq 0$, 所以 $h \neq \pm a$,

所以特征方程为 $\lambda^2-2a\lambda+a^2-h^2=0,$

两特征根为 $\lambda_1=a-h,\lambda_2=a+h.$

因而曲线的两个主方向为

$$X_1:Y_1=h:(-h)=1:(-1),$$
$$X_2:Y_2=h:h=1:1,$$

曲线的两条主直径为

$$(ax+hy)-(hx+ay)=0,$$
$$与(ax+hy)+(hx+ay)=0,$$

即 $$x-y=0与x+y=0.$$

取它们分别作为新坐标系的x′轴，y′轴，则坐标变换公式为

$$\begin{cases} x^{'}=\dfrac{x+y}{\sqrt{2}} \\ y_{'}=\dfrac{-x=y}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

解出 x，y 得

$$\begin{cases} x=\dfrac{x'}{\sqrt{2}}-\dfrac{y'}{\sqrt{2}}, \\ y=\dfrac{x'}{\sqrt{2}}+\dfrac{y'}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

带入已知曲线方程，得

$$a\left(\frac{x'}{\sqrt{2}}-\frac{y'}{\sqrt{2}}\right)^2+2h\left(\frac{x'}{\sqrt{2}}-\frac{y'}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{x'}{\sqrt{2}}+\frac{y'}{\sqrt{2}}\right)+a\left(\frac{x'}{\sqrt{2}}+\frac{y'}{\sqrt{2}}\right)^2=d,$$

即 $$(a+h)x'^2+(a-h)y'^2=d,$$

所以标准形式为

$$\frac{x'^2}{\dfrac{d}{a+h}}+\frac{y'^2}{\dfrac{d}{a-h}}=1.$$

所以曲线的两半轴长分别为 $\sqrt{\left|\dfrac{d}{a+h}\right|},\sqrt{\left|\dfrac{d}{a-h}\right|}$.

7. 设 $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$ 表示两条平行直线, 证明

这两条直线之间的距离是$d=\sqrt{-\frac{4\mathrm{K}_1}{\mathrm{I}_1^2}}$.

证明　　因为二次曲线表示两条平行直线，所以二次曲线可简化为

$$\mathrm{I}_1 y^2+\frac{\mathrm{K}_1}{\mathrm{I}_1}=0,$$

即
$$y=\sqrt{-\frac{\mathrm{K}_1}{\mathrm{I}_1^2}} \quad 与 \quad y=-\sqrt{\frac{-\mathrm{K}_1}{\mathrm{I}_1^2}},$$

所以两直线的距离

$$d=2\sqrt{-\frac{\mathrm{K}_1}{\mathrm{I}_1^2}}=\sqrt{-\frac{4\mathrm{K}}{\mathrm{I}_1^2}}.$$

8. 试证方程$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$确定一个实圆必须且需$\mathrm{I}_1^2=4\mathrm{I}_2, \mathrm{I}_1\mathrm{I}_3<0$.

证明　因为圆是椭圆中两半轴相等的情形,
所以特征方程为

$\lambda^2-\mathrm{I}_1\lambda+\mathrm{I}_2=0$, 有两等根

所以$\Delta=\mathrm{I}_1{}^2-4\mathrm{I}_2=0$

即$\mathrm{I}_1{}^2=4\mathrm{I}_2$

而椭圆的充要条件是$\mathrm{I}_2\succ 0$，$\mathrm{I}_{,1}\mathrm{I}_3\prec 0$

所以曲线为一个实圆的充要条件是$\mathrm{I}_1{}^2=4\mathrm{I}_2$, $\mathrm{I}_2\mathrm{I}_{,1}\mathrm{I}_3\prec 0$.