

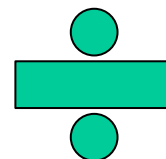
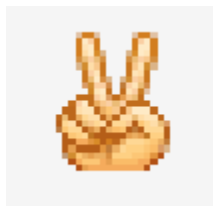
第三节 整除的概念

主要内容

- 引入
- 带余除法
- 整除

一、引入

一元多项式的运算

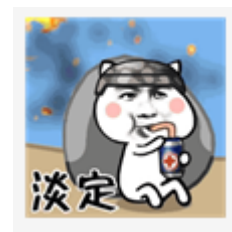


$$11 = 2 * 2 + 7$$

$$11 = 2 * 4 + 3$$

$$11 = 2 * 3 + 5$$

$$11 = 2 * 5 + 1$$



例如，设

$$f(x) = 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6,$$

$$g(x) = x^2 - 3x + 1.$$

可以按下面的两种来作除法：

$$\begin{array}{r} 3x + 13 \\ \hline x^2 + (-3)x + 1 \overline{) 3x^3 + 4x^2 + (-5)x + 6} \\ \underline{3x^3 + (-9)x^2 + 3x} \\ 13x^2 + (-8)x + 6 \\ \underline{13x^2 + (-39)x + 13} \\ 31x - 7 \end{array}$$



除式

被除式

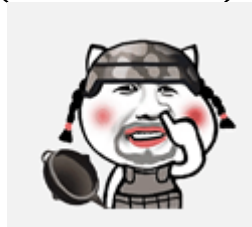
商

$$g(x) = x^2 - 2x + 1 \left| \begin{array}{l} 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6 \\ 3x^3 - 9x^2 + 3x \\ \hline 13x^2 - 8x + 6 \\ 13x^2 - 39x + 13 \\ \hline r(x) = 31x - 7 \end{array} \right.$$

$$q(x) = 3x + 13$$

余式

于是求得商为 $3x + 13$, 余式为 $31x - 7$. 所得结果可以写成 $3x^3 + 4x^2 - 5x + 6 = (3x + 13)(x^2 - 3x + 1) + (31x - 7)$.



二、带余除法

对于 $P[x]$ 中任意两个多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ ，其中 $g(x) \neq 0$ ，

一定有 $P[x]$ 中的多项式 $q(x)$ ， $r(x)$ 存在，使

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x) \quad (1)$$

成立，其中 $\partial(r(x)) < \partial(g(x))$ 或者 $r(x) = 0$ ，并

且这样的 $q(x)$ ， $r(x)$ 是**唯一**决定的。

暗中观察!



思考：1. 为什么要求 $g(x) \neq 0$?

2. 有 $\partial(r(x)) < \partial(g(x))$ 为什么还有 $r(x) = 0$?

数学归纳法

Step1:对于k为最小值时, 命题成立。

Step2:假设对于k=n-1时, 命题成立,
去证k=n时也成立。

第二 数学 归纳 法

Step1:对于n为最小值时, 命题成立。

Step2:假设对于k小于等于n时, 命题成立, 去
证k=n时也成立。

$f(x) = q(x)g(x) + r(x)$ 其中 $\partial(r(x)) < \partial(g(x))$ 或者 $r(x) = 0$.

证明 如果 $f(x) = 0$, 取 $q(x) = r(x) = 0$ 即可.

以下设 $f(x) \neq 0$. 令 $f(x), g(x)$ 的次数分别为 n, m .

对 $f(x)$ 的次数 n 作(第二)数学归纳法.

当 $n=0, m=0$ 时, 记 $f(x)=a, g(x)=b$ $f(x) = \frac{a}{b}g(x) + 0$.

当 $n=0, m>0$ 时, 取 $q(x)=0, r(x)=f(x)$ 即可.

当 $n < m$ 时, 显然取 $q(x) = 0, r(x) = f(x)$, 结论成立.



下面讨论 $n \geq m$ 的情形.

假设当 $f(x)$ 的次数小于 n 时, $q(x), r(x)$ 的存在性已证.

现来看次数为 n 的情形.

令 ax^n, bx^m 分别是 $f(x), g(x)$ 的首项, 显然

$b^{-1}ax^{n-m}g(x)$ 与 $f(x)$ 有相同的首项, 因而多项式

$$f_1(x) = f(x) - b^{-1}ax^{n-m}g(x)$$

的次数小于 n 或为 0 . 对于 $f_1(x) = 0$, 取

$$q(x) = b^{-1}ax^{n-m}, \quad r(x) = 0;$$

对于 $f_1(x)$ 的次数小于 n , 由归纳法假设, 对 $f_1(x), g(x)$ 有

$q_1(x), r_1(x)$ 存在使

$$f_1(x) = q_1(x) g(x) + r_1(x),$$

其中 $\partial(r_1(x)) < \partial(g(x))$ 或者 $r_1(x) = 0$.

于是

$$f_1(x) = f(x) - b^{-1}ax^{n-m}g(x)$$

$$f_1(x) = q_1(x)g(x) + r_1(x)$$



$$f(x) = (q_1(x) + b^{-1}ax^{n-m})g(x) + r_1(x),$$

也就是说, 有 $q(x) = q_1(x) + b^{-1}ax^{n-m}$, $r(x) = r_1(x)$

使 $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$ 成立. 存在性得证.

下面再来证唯一性. 设另有 $q'(x), r'(x)$ 使

$$f(x) = q'(x)g(x) + r'(x),$$

其中 $\partial(r'(x)) < \partial(g(x))$ 或者 $r'(x) = 0$. 于是

$$q(x)g(x) + r(x) = q'(x)g(x) + r'(x),$$

即

$$(q(x) - q'(x))g(x) = r'(x) - r(x).$$

如果 $q(x) \neq q'(x)$, 又据假设 $g(x) \neq 0$, 那么

$$r'(x) - r(x) \neq 0,$$

且有 $\partial (q(x) - q'(x)) + \partial (g(x)) = \partial (r'(x) - r(x))$.

但是

$$\partial (g(x)) > \partial (r'(x) - r(x)) ,$$

所以上式不可能成立. 这就证明了 $q(x) = q'(x)$, 因此 $r'(x) = r(x)$. 唯一性得证.

证毕

带余除法中所得的 $q(x)$ 通常称为 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的商, $r(x)$ 通常称为 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的余式.

三、整除 1. 定义

定义 5 数域 P 上的多项式 $g(x)$ 称为**整除** $f(x)$ ，

如果有数域 P 上的多项式 $h(x)$ 使等式

$$f(x) = g(x)h(x)$$

成立. 用 “ $g(x) | f(x)$ ”表示 $g(x)$ 整除 $f(x)$ ，

用 “ $g(x) \nmid f(x)$ ”表示 $g(x)$ 不能整除 $f(x)$ 。

当 $g(x) | f(x)$ 时， $g(x)$ 就称为 $f(x)$ 的**因式**，

$f(x)$ 称为 $g(x)$ 的**倍式**.

问题：

1. 在 $P[x]$ 中，2能整除3吗？ $f(x)$ 能整除0吗？
2. 在 $P[x]$ 中，何时0能整除 $f(x)$ ？何时 $f(x)$ 整除1？
3. 当 $g(x) \neq 0$ 时，能否由带余除法得整除性的判别法？

2. 整除的条件

定理 1 对于数域 P 上的任意两个多项式 $f(x)$ 和 $g(x)$ ，

其中 $g(x) \neq 0$ ， $g(x) \mid f(x)$ 的充分必要条件是

$g(x)$ 除 $f(x)$ 的余式为零。

证明 如果 $r(x) = 0$, 那么 $f(x) = q(x)g(x)$,

即 $g(x) \mid f(x)$.

反过来, 如果 $g(x) \mid f(x)$, 那么

$$f(x) = q(x)g(x) = q(x)g(x) + 0,$$

即 $r(x) = 0$.

证毕

当 $g(x) \mid f(x)$ 时, 如 $g(x) \neq 0$, $g(x)$ 除 $f(x)$ 所得的商 $q(x)$

有时也可用 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 来表示.

问题:

- (1) 带余除法中 $g(x) \neq 0$, $g(x) | f(x)$ 中, $g(x)$ 能否为零?
- (2) 任一个多项式 $f(x)$ 能否整除它自身?
- (3) 任一多项式 $f(x)$ 能否整除零多项式 0 ?
- (4) 零次多项式能否整除任一个多项 $f(x)$?
- (5) 两个多项式之间的整除关系会不会因为数域的扩大而发生变换 ?

3. 整除性的性质

性质 1 如果 $f(x) \mid g(x)$, $g(x) \mid f(x)$, 那么
 $f(x) = c g(x)$, 其中 c 为非零常数.

性质 2 整除的传递性

如果 $f(x) \mid g(x)$, $g(x) \mid h(x)$, 那么 $f(x) \mid h(x)$.

性质 3 如果 $f(x) \mid g_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, r$,

那么 $f(x) \mid (u_1(x)g_1(x) + u_2(x)g_2(x) + \dots + u_r(x)g_r(x))$,

其中 $u_i(x)$ 是数域 P 上任意的多项式.

$g_1(x), g_2(x), \dots, g_r(x)$ 的一个组合.



多项式 $f(x)$ 与它的任一个非零常数倍 $cf(x)$ ($c \neq 0$)

有相同的因式，也有相同的倍式.

在多项式整除性的讨论中， $f(x)$ 常常可用 $cf(x)$ 来代替.

小结和作业

1. 请你叙述带余除法定理和整除的定义？
2. 整除的判别方法有哪些？
3. 整除有哪些性质？
4. 作业见学习通.