文山學院 WENSHAN UNIVERSITY

第二节　标 准 形

主要内容

- 标准形的定义
- 配方法及其证明
- 配方法的矩阵形式
- 初等变换法

文山学院
WENSHAN UNIVERSITY

一、标准形的定义

定义 二次型 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 经过非退化线性替换 $X = CY$ 所化为的如下形式(只含平方项)

$$d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \ldots + d_n y_n^2$$

的二次型称为二次型 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 的一个**标准形**.

是不是任何一个二次型都可以经过非退化的线性替换把二次型化为标准形?

例1 利用配方的思想求二次型

$$f(x_1,x_2)=x_1^2+6x_1x_2+2x_2^2$$

标准型.

例2 求二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=4x_1x_2+12x_2x_3$$

的标准型.

提示：令 $x_1=y_1-y_2, x_2=y_1+y_2$

二、配方法及其证明

定理 1 数域 P 上任意一个二次型都可以经过非退化的线性替换化为标准形.

下面的证明实际上是一个具体把二次型化成标准的方法，这就是中学里学过的"配方法".

证明 对变量的个数 n 作归纳法.

对于 $n=1$，二次型就是 $f(x_1)=a_{11}x_1^2$.

它已经是平方和了，结论成立.

现假设对 $n-1$ 元的二次型，定理的结论成立.

即 $g(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n-1} a_{ij}x_i x_j \xlongequal{X=CY} d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_{n-1} y_{n-1}^2$

设

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j \quad (a_{ij}=a_{ji}).$$

分三种情形来讨论：

1) $a_{ii}\,(i=1,2,\ldots,n)$ 中至少有一个不为零，

不妨设 $a_{11}\neq 0$，这时

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_{11}x_1^2+\sum_{j=2}^{n}a_{1j}x_1x_j$$

$$+\sum_{i=2}^{n}a_{i1}x_ix_1+\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n}a_{ij}x_ix_j$$

$$= a_{11}x_1^2 + 2\sum_{j=2}^{n} a_{1j}x_1x_j + \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

$$= a_{11}(x_1 + \sum_{j=2}^{n} a_{11}^{-1}a_{1j}x_j)^2$$

$$\boxed{- a_{11}^{-1}(\sum_{j=2}^{n} a_{1j}x_j)^2 + \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n} a_{ij}x_ix_j}$$

$$= a_{11}(x_1 + \sum_{j=2}^{n} a_{11}^{-1}a_{1j}x_j)^2 + \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n} b_{ij}x_ix_j \text{ ,}$$

其中 $\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n} b_{ij}x_i x_j = -a_{11}^{-1}(\sum_{j=2}^{n} a_{1j}x_j)^2 + \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n} a_{ij}x_i x_j$

是一个 $x_2, x_3, \ldots, x_n$ 的二次型. 令

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + \sum_{j=2}^{n} a_{11}^{-1}a_{1j}x_j, \\ y_2 = x_2, \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n = x_n, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x_1 = y_1 - \sum_{j=2}^{n} a_{11}^{-1}a_{1j}x_j, \\ x_2 = y_2, \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = y_n, \end{cases}$$

这是一个非退化线性替换，它使

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_{11}y_1^2+\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n}b_{ij}y_iy_j .$$

由归纳法假设，对 $\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n}b_{ij}y_iy_j$ 有非退化线性替换

$$\begin{cases} z_2=c_{22}y_2+c_{23}y_3+\cdots+c_{2n}y_n\,, \\ z_3=c_{32}y_2+c_{33}y_3+\cdots+c_{3n}y_n\,, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_n=c_{n2}y_2+c_{n3}y_3+\cdots+c_{nn}y_n\,, \end{cases}$$

能使它化为标准形 $d_2z_2^2 + d_3z_3^2 + \ldots + d_nz_n^2$.

于是非退化线性替换

$$\begin{cases} z_1 = y_1, \\ z_2 = c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_n = c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases}$$

就使 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 变成

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{11}z_1^2 + d_2z_2^2 + \ldots + d_nz_n^2,$$

根据归纳法原理，此时定理得证.

2) 所有 $a_{ii}=0$，但是至少有一个 $a_{1j}\neq 0\ (j>1)$

不失一般性，设 $a_{12}\neq 0$． 令

$$\begin{cases} x_1 = z_1 + z_2\,, \\ x_2 = z_1 - z_2\,, \\ x_3 = z_3\,, \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = z_n\,. \end{cases}$$

它是非退化的线性替换，且使

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 2a_{12}x_1x_2 + \dots$$
$$= 2a_{12}(z_1 + z_2)(z_1 - z_2) + \dots$$
$$= 2a_{12}z_1^2 - 2a_{12}z_2^2 + \dots,$$

这时上式右端是 $z_1, z_2, \dots, z_n$ 的二次型，且 z_1^2 的系数不为零，属于第一种情况，定理成立.

3) $a_{11} = a_{12} = \dots = a_{1n} = 0$.

由对称性，有

$$a_{21} = a_{31} = \dots = a_{n1} = 0 .$$

这时

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=2}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

是 $n-1$ 元二次型，根据归纳法假设，它能用非退化线性替换化为标准形.

证毕

$$d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + \ldots + d_nx_n^2$$

$$= (x_1, x_2, \cdots, x_n)\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

二次型的标准形的矩阵是对角矩阵.

反过来，矩阵为对角形的二次型就只含平方项. 按上一节的讨论，经过非退化的线性替换，二次型的矩阵变到一个合同的矩阵，因此，用矩阵的语言，

定理 2 在数域 P 上，任意一个对称矩阵都合同于一对角矩阵.

定理 2 也就是说，对于任意一个对称矩阵 A 都可以找到一个可逆矩阵 C 使

$$C^{\mathrm{T}}AC$$

成为对角矩阵.

例 3 用配方法化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$$

为标准形.

解 由于二次型的平方项的系数全为零，故属于定理 1 的证明过程中的第二种情形，作非退化线性替换

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2\,, \\ x_2 = y_1 - y_2\,, \\ x_3 = y_3\,, \end{cases}$$

则
$$f(x_1,x_2,x_3)=2(y_1+y_2)(y_1-y_2)$$
$$+2(y_1+y_2)y_3-6(y_1-y_2)y_3$$
$$=2y_1^2-2y_2^2-4y_1y_3+8y_2y_3$$
$$=2(y_1-y_3)^2-2y_3^2-2y_2^2+8y_2y_3\,.$$

再令 $\begin{cases} z_1=y_1-y_3\,, \\ z_2=y_2\,, \\ z_3=y_3\,, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} y_1=z_1+z_3\,, \\ y_2=z_2\,, \\ y_3=z_3\,, \end{cases}$

则
$$f(x_1,x_2,x_3)=2z_1^2-2z_2^2+8z_2z_3-2z_3^2$$
$$=2z_1^2-2(z_2-2z_3)^2+8z_3^2-2z_3^2$$
$$=2z_1^2-2(z_2-2z_3)^2+6z_3^2 .$$

最后令 $\begin{cases} w_1=z_1 , \\ w_2=z_2-2z_3, \\ w_3=z_3 , \end{cases}$ 即 $\begin{cases} z_1=w_1 , \\ z_2=w_2+2w_3, \\ z_3=w_3 , \end{cases}$

则 $$f(x_1,x_2,x_3)=2w_1^2-2w_2^2+6w_3^2.$$

这即为标准形，而这几次线性替换的结果相当于作一个总的线性替换，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}.$$

例 4 用配方法把三元二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$$

化为标准形，并求所用的线性替换及变换矩阵.

三、配方法的矩阵形式

前面所讲的配方法的过程，可以用矩阵写出来.

我们按前面的每一种情况写出相应的矩阵.

情形一　$a_{11} \neq 0$　　这时的变数替换为

$$
\begin{cases}
x_1 = y_1 - \sum\limits_{j=2}^{n} a_{11}^{-1} a_{1j} x_j, \\
x_2 = y_2, \\
\quad \cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_n = y_n,
\end{cases}
$$

该线性替换的矩阵为

$$C_1=\begin{pmatrix} 1 & -a_{11}^{-1}a_{12} & \cdots & -a_{11}^{-1}a_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

则上述变数替换相应于合同变换

$$A \to C_1^{\mathrm{T}}AC_1 .$$

为了计算 $C_1^{\mathrm{T}}AC_1$，可令

$$\alpha=(a_{12},\cdots,a_{1n}),\ A_1=\begin{pmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

于是 A 和 C_1 可写成分块矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \alpha \\ \alpha^{\mathrm{T}} & A_1 \end{pmatrix},\ C_1=\begin{pmatrix} 1 & -a_{11}^{-1}\alpha \\ O & E_{n-1} \end{pmatrix},$$

其中 α^{T} 为 α 的转置，E_{n-1} 为 $n-1$ 级单位矩阵，

于是

$$C_1^{\mathrm{T}} A C_1 = \begin{pmatrix} 1 & O \\ -a_{11}^{-1}\alpha^{\mathrm{T}} & E_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \alpha \\ \alpha^{\mathrm{T}} & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -a_{11}^{-1}\alpha \\ O & E_{n-1} \end{pmatrix},$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & \alpha \\ O & A_1 - a_{11}^{-1}\alpha^{\mathrm{T}}\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -a_{11}^{-1}\alpha \\ O & E_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & O \\ O & A_1 - a_{11}^{-1}\alpha^{\mathrm{T}}\alpha \end{pmatrix}.$$

矩阵 $A_1 - a_{11}^{-1}\alpha^T\alpha$ 是一个 $(n-1)\times(n-1)$ 对称矩阵，由归纳法假设，有 $(n-1)\times(n-1)$ 可逆矩阵 G 使

$$G^T(A_1 - a_{11}^{-1}\alpha^T\alpha)G = D$$

为对角形．令

$$C_2 = \begin{pmatrix} 1 & O \\ O & G \end{pmatrix},$$

于是

$$C_2^{\mathrm{T}}C_1^{\mathrm{T}}AC_1C_2=\begin{pmatrix}1 & O\\ O & G^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & O\\ O & A_1-a_{11}^{-1}\alpha^{\mathrm{T}}\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & O\\ O & G\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a_{11} & O\\ O & D\end{pmatrix},$$

这是一个对角矩阵．我们所要的可逆矩阵为

$$C=C_1C_2.$$

情形二　$a_{11}=0$ 但有一个 $a_{ii}\neq 0$

这时，只要把 A 的第一行与第 i 行互换，再把第一列与第 i 列互换，就归结成情形一，根据初等矩阵与初等变换的关系，取

$$
C_1 = P(1,i) = \begin{array}{cl}
\left(\begin{array}{cccccccc}
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1
\end{array}\right)
&
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ \\ \leftarrow i\text{行} \\ \\ \\ \\
\end{array}
\\
\begin{array}{cccccccc}
 & & & & \uparrow & & & \\
 & & & & i\text{列} & & &
\end{array}
&
\end{array}
$$

显然

$$P(1,i)^{\mathrm{T}} = P(1,i).$$

矩阵

$$C_1^{\mathrm{T}}AC_1 = P(1,i)\,A\,P(1,i)$$

就是把 A 的第一行与第 i 行互换，再把第一列与第 i 列互换的结果. 因此，$C_1^{\mathrm{T}}AC_1$ 左上角第一个元素就是 a_{ii}，这样就归结到第一种情形.

情形三 $a_{ii}=0, i=1,\ldots,n,$ 但有一 $a_{1j}\neq 0, j\neq 0$

与上一种情形类似，作合同变换

$$P(2,j)^{\mathrm{T}}AP(2,j)$$

可以把 a_{1j} 搬到第一行第二列的位置，这样就变成了配方法中的第二种情况．与那里的变数替换相对应，取

$$C_1=\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right),$$

于是 $C_1^{\mathrm{T}}AC_1$ 的左上角就是

$$\begin{pmatrix} 2a_{12} & 0 \\ 0 & -2a_{12} \end{pmatrix},$$

也就归结到第一种情形.

情形四 $a_{1j}=0,\ j=1,\dots,n$

由对称性，$a_{j1}, j=1,2,\dots,n$，也全为零，于是

$$A=\begin{pmatrix}0 & O\\ O & A_1\end{pmatrix},$$

A_1 是 $n-1$ 级对称矩阵. 由归纳法假设，有 $n-1$ 级可逆矩阵 G 使 $G^{T}A_1G=D$

成对角形. 取 $$C=\begin{pmatrix}1 & O\\ O & G\end{pmatrix},$$

$C^{T}AC$ 就成为对角形.

例 5 利用矩阵的合同变换化化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$$

为标准形.

解 该二次型对应的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

因为 $a_{11}=a_{22}=a_{33}=0$, 但 $a_{12}\neq 0$, 故属于情形三

取

$$C_1=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$A_1=C_1^{\mathrm{T}}AC_1=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -3\\ 1 & -3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2 & 0 & -2\\ 0 & -2 & 4\\ -2 & 4 & 0\end{pmatrix}.$$

再取
$$C_2=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

$$A_2=C_2^{\mathrm{T}}A_1C_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&-2\\0&-2&4\\-2&4&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-2&4\\0&4&-2\end{pmatrix}.$$

再取
$$C_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = C_3^{\mathrm{T}} A_2 C_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

A_3 已是对角矩阵，因此令

$$C = C_1C_2C_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

就有

$$C^{\mathrm{T}}AC = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

作非退化线性替换

$$X = CY,$$

即得

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2y_1^2 - 2y_2^2 + 6y_3^2 .$$

四、初等变换法

在本节的最后，再来讨论化二次型为标准形的初等变换法.

由本节P214 定理 2 知，对任意一个对称矩阵 A 都可以找到一个可逆矩阵 C 使

$$C^{T}AC$$

成为对角矩阵. 由于 C 可逆，由第四章 定理 6 (p191)知，存在初等矩阵 $P_1, P_2, \ldots, P_k$，有

$$C = P_1P_2\ldots P_k.$$

于是 $P_k^{\mathrm{T}} \cdots P_2^{\mathrm{T}} P_1^{\mathrm{T}} A P_1 P_2 \cdots P_k$

为对角矩阵. 这说明，任意一个实对称矩阵 A，可以经过一系列相同类型的初等行、列变换化为对角形矩阵. 这里所谓的相同类型的初等行、列变换指的是：每对 A 进行一次行变换，紧接着对 A 进行一次相同类型的列变换.

又因为 $C = P_1 P_2 \cdots P_k = E P_1 P_2 \cdots P_k$，

所以，对 A 作的列变换同样施加于 E，即得变换矩阵 C. 于是就有

用初等变换法化二次型为标准形的方法是：

将二次型的矩阵 A 与单位矩阵 E 构造矩阵 B

$$B=\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix},$$

对 B 作相同类型的初等行、列变换，直到 B 中的子块 A 成为对角矩阵，则 B 中原来对应于 E 的部分即为线性变换矩阵. 对角矩阵的主对角线上的元素即为标准形的系数.

例 6 用初等变换法化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$$

为标准形.

解 该二次型对应的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

构造矩阵 B

$$B=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&-3\\1&-3&0\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等变换}}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-2&0\\0&0&6\\1&-1&3\\1&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

所以二次型的标准形为 $f=2y_1^2-2y_2^2+6y_3^2$，

所用线性替换为 $\begin{cases}x_1=y_1-y_2+3y_3,\\x_2=y_1+y_2-y_3,\\x_3=y_3.\end{cases}$

例 7 用初等变换法化二次型

$$f = -12x_1^2 - 3x_2^2 - 12x_3^2 + 12x_1x_2 - 24x_1x_3 + 8x_2x_3$$

为标准形.