第二章 轨迹与方程

典型题解

解答题

1. 已知两点 $A(-2,2)$ 和 $B(2,2)$,求满足条件 $\left|\overrightarrow{MA}\right|-\left|\overrightarrow{MB}\right|=4$ 的动点 M 的轨迹方程.

解：动点 M 在轨迹上的充要条件是 $\left|\overrightarrow{MA}\right|-\left|\overrightarrow{MB}\right|=4$

记动点 M 为 (x,y)，则上式用 (x,y) 可表示为：

$$\sqrt{(x+2)^2+(y+2)^2}-\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}=4$$

解之得 $\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}=x+y-2$

上式成立则要求 $x+y-2\geq 0$

去根号得 $xy=2\ (x+y\geq 2)$

2. 设动点与点(1, 0, 0) 的距离等于从这点到平面 x=4 的距离的一半，试求此动点的轨迹.

解:设所求动点为 $M=(x,y,z)$,

∵ M 与点(1, 0, 0) 的距离等于从这点到平面 x=4 的距离的一半

则 $\sqrt{(x-1)^2+y^2+z^2}=\frac{1}{2}|x-4|$,

整理得 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{3}=1$ 即为所求.

3. 求通过原点及点 $A(a,0,0)$，$B(0,b,0)$，$C(0,0,c)$ 的球面方程，且求球心及半径.

解：通过原点的球面方程可设为 $x^2+y^2+z^2+Dx+Ey+Fz=0$

又∵点 $A(a,0,0)$， $B(0,b,0)$， $C(0,0,c)$ 在球面上

∴ $a^2+Da=0,b^2+Eb=0,c^2+Fc=0$

则$D=-a,E=-b,F=-c$

$\therefore$ 所求球面方程为$x^2+y^2+z^2-ax-by-cz=0$

球面的中心和半径为：$\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2},\frac{c}{2}\right)$和$\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

4. 求一条直径的两个端点为 A$(2,-3,5)$与 B$(4,1,-3)$的球面方程.

解：由已知，球面的球心坐标$a=\frac{2+4}{2}=3,b=\frac{-3+1}{2}=-1,c=\frac{5-3}{2}=1$，

球的半径$R=\frac{1}{2}\sqrt{(4-2)^2+(1+3)^2+(5+3)^2}=\sqrt{21}$，

所以球面方程为：

$(x-3)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=21$

5. 求连结两点$A(1,2,3)$和$B(2,1,-4)$的线段垂直平分面的方程.

解：设垂直平分面上任一点的方程为$M(x,y,z)$，由题意知：

$$\left|\overrightarrow{MA}\right|=\left|\overrightarrow{MB}\right|$$

其中$\left|\overrightarrow{AM}\right|=\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2}$

$\left|\overrightarrow{BM}\right|=\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2+(z-4)^2}$

故$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2+(z-4)^2}$

化简得：$2x-6y+2z-7=0$

即所求的垂直平分面的方程.

6. 求曲线$\overrightarrow{r(t)}=\vec{i}\cos\pi t+\vec{j}\sin\pi t+\vec{k}t$ 和$x^2+y^2+z^2=10$的交点.

解：$\overrightarrow{r(t)}=\vec{i}\cos\pi t+\vec{j}\sin\pi t+\vec{k}t$ 化为坐标式参数方程得$\begin{cases}x=\cos\pi t\\y=\sin\pi t\\z=t\end{cases}$ 代入

$x^2+y^2+z^2=10$，得$\cos^2 pt+\sin^2 pt+t^2=10$解得：$t=\pm 3$

$\therefore$ 已知曲线与曲面的交点为$(-1,0,3)$和$(-1,0,-3)$.

7. 已知两个球面$x^2+y^2+z^2-6x+8y-10z+41=0$，$x^2+y^2+z^2+6x+2y-6z$
$-10=0$，求以连接它们两中心的线段为直径的球面方程.

解：球面 $x^2+y^2+z^2-6x+8y-10z+41=0$ 写成标准形式为

$(x-3)^2+(y+4)^2+(z-5)^2=9$　它的中心为 $A(3,-4,5)$

球面 $x^2+y^2+z^2+6x+2y-6z-10=0$ 写成标准形式为

$(x+3)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=29$　它的中心为 $B(-3,-1,3)$

连接它们两中心的线段为直径的球面方程的中心为 $M\left(0,-\frac{5}{2},4\right)$，直径为 $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{109}$

∴ 球面方程为 $x^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2+(z-4)^2=\frac{109}{4}$

8. 求曲线 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 和 $x^2+y^2-ax=0$ 的交线的一般方程和参数方程.

解：交线的一般方程为 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x^2+y^2-ax=0 \end{cases}$

由 $x^2+y^2-ax=0$ 可得其参数方程为：$\begin{cases} x=a\cos^2\theta \\ y=a\cos\theta\sin\theta \end{cases}(0\le\theta\le\pi)$

代入 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 得：$z=\pm a\sin q$

∵ $z=-a\sin q=a\sin t\ \pi\le t<2\pi$

∴ 交线的参数方程为：$\begin{cases} x=a\cos^2\theta \\ y=a\cos\theta\sin\theta(0\le\theta<2\pi) \\ z=a\sin\theta \end{cases}$

9. 把参数方程 $\begin{cases} x=2\cos t+1 \\ y=9\sin t+4\cos t \end{cases}(0\le t<2\pi)$ 消去参数 t 化为普通方程.

解：由题意知：$\cos t=\frac{x-1}{2}$，$\sin t=\frac{-2x+y+2}{9}$

∵ $\cos^2 t+\sin^2 t=1$

∴ 平方相加得：$\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(2x-y-2)^2}{81}=1$

10. 在空间，选取适当的坐标系，求到两定点距离之比为常数的点的轨迹.

解：取二定点的连线为 x 轴，二定点连接线段的中点作为坐标原点，且令两距离之比的常数为 m，二定点的距离为 $2a$，则二定点的坐标为 $(a,0,0),(-a,0,0)$，设动

点$M(x,y,z)$，所求的轨迹为C，则

$$M(x,y,z)\in C \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}=m\sqrt{(x+a)^2+y^2+z^2}$$

亦即$(x-a)^2+y^2+z^2=m^2[(x+a)^2+y^2+z^2]$

经同解变形得：$(1-m^2)(x^2+y^2+z^2)-2a(1+m^2)x+(1-m^2)a^2=0$

上式即为所要求的动点的轨迹方程.

讨论轨迹图形：

(1).当$m=1$时，轨迹方程化为$x=0$，轨迹为坐标平面yoz

(2).当$m\neq 1$时，轨迹方程可化为$\left(x-\frac{a\left(m^2+1\right)}{m^2-1}\right)^2+y^2+z^2=\left(\frac{2am}{m^2-1}\right)^2$，这时的轨迹为球面，球心为$\left(\frac{a\left(m^2+1\right)}{m^2-1},0,0\right)$，半径为$\frac{2am}{\left|m^2-1\right|}$.

11. 一动点到两定点的距离的乘积等于定值m^2,求此动点的轨迹.

解:设两定点的距离为$2a$,并取两定点的连线为x轴, 两定点所连线段的中垂线为y轴.现有: $|AM|\cdot|BM|=m^2$.

设$M(x,y)$在$Rt\triangle BNM$中　$(a+x)^2+y^2=|AM|^2$. (1)

在$Rt\triangle BNM$中　$(a-x)^2+y^2=|BM|^2$. (2)

由(1) (2)两式得:　$(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)=m^4-a^4$.

12. 求通过原点与$(4,0,0),(1,3,0),(0,0,-4)$球面的方程.

解：设所求的球面方程为：$x^2+y^2+z^2+2gx+2hy+2kz+l=0$

因该球面经过点$(0,0,0),(4,0,0),(1,3,0),(0,0,-4)$，所以

$$\begin{cases} l=0 \\ 16+8g=0 \\ 10+2g+6h=0 \\ 16-8k=0 \end{cases} \qquad (1)$$

解（1）有

$$\begin{cases} l=0 \\ h=-1 \\ g=-2 \\ k=2 \end{cases}$$

$\therefore$ 所求的球面方程为 $x^2+y^2+z^2-4x-2y+4z=0$

13. 平面 $x=c$ 与 $x^2+y^2-2x=0$ 的公共点组成怎样的轨迹.

解：上述二平面的公共点的坐标满足

$$\begin{cases} x^2+y^2-2x=0 \\ x=c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2=c(2-c) \\ x=c \end{cases}$$

从而：（Ⅰ）当 $0<c<2$ 时，公共点的轨迹为：

$$\begin{cases} y=\sqrt{c(2-c)} \\ x=c \end{cases} \quad 及 \quad \begin{cases} y=-\sqrt{c(2-c)} \\ x=c \end{cases}$$

即为两条平行轴的直线；

（Ⅱ）当 $c=0$ 时，公共点的轨迹为：

$$\begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases} \quad 即为 z 轴；$$

（Ⅲ）当 $c=2$ 时，公共点的轨迹为：

$$\begin{cases} y=0 \\ x=2 \end{cases} \quad 即过 (2,0,0) 且平行于 z 轴的直线；$$

（Ⅳ）当 $c>2$ 或 $c<0$ 时，两图形无公共点.

14. 把曲线的参数方程化为一般方程：$x=4\sin t, y=4\sin t, z=4\cos t \ \left(0\le t\le 2\pi\right)$.

解：从已知曲线的参数方程中，消去参数 t，可得曲线的一般方程：

$$\begin{cases} x=4\sin t, \\ y=5\sin t, \\ z=4\cos t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{4}=\sin t \\ \dfrac{y}{5}=\sin t \\ \dfrac{z}{4}=\cos t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{4}-\dfrac{y}{5}=0 \\ \left(\dfrac{x}{4}\right)^2+\left(\dfrac{z}{4}\right)^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x-4y=0 \\ x^2+z^2=16 \end{cases}$$

15. 曲面 $x^2+9y^2=10z$ 与三个坐标面的交线分别是什么曲线？

解：曲面 $x^2+9y^2=16z$ 与 xoy 面 $(z=0)$， yoz 面 $(x=0)$， zox 面 $(y=0)$ 的交线分

别为：

$$\begin{cases}x^2+9y^2=16z\\z=0\end{cases},\begin{cases}x^2+9y^2=16z\\x=0\end{cases},\begin{cases}x^2+9y^2=16z\\y=0\end{cases}$$

即$\begin{cases}x^2+9y^2=0\\z=0\end{cases},\begin{cases}9y^2=16z\\x=0\end{cases},\begin{cases}x^2=16z\\y=0\end{cases}$

即为坐标原点；顶点在原点以 z 轴为对称轴，且处在 yoz 面上的抛物线；以及顶点在原点，以 z 轴为对称轴，且处在 zox 面上的抛物线.

16. 求空间曲线$\begin{cases}y^2-4z=0\\x+z^2=0\end{cases}$的参数方程.

解：令 $y=2t$,代入方程 $y^2-4z=0$ 得 $y=t^2$ 再将所得结果代入方程 $x+z^2=0$ 得 $x=-t^4$.从而知曲线的参数方程为$\begin{cases}x=-t^4\\y=2t\\z=t^2\end{cases}$

17. 求空间曲线 $\begin{cases}x^2+y^2-z=0\\z=x+1\end{cases}$对三个坐标面的射影柱面方程.

解：从方程组$\begin{cases}x^2+y^2-z=0\\z=x+1\end{cases}$

分别消去变量 x,y,z ，得：$(z-1)^2+y^2-z=0$

亦即：$z^2+y^2-3z+1=0$ （Ⅰ）

$z-x-1=0$ （Ⅱ）

$x^2+y^2-x-1=0$ （Ⅲ）

（Ⅰ）是原曲线对 yoz 平面的射影柱面方程；

（Ⅱ）是原曲线对 zox 平面的射影柱面方程；

（Ⅲ）是原曲线对 xoy 平面的射影柱面方程.

18. 在空间，选取适当的坐标系，求到两定点的距离之和为常数 8 的点的轨迹（其中两定点距离为 4）.

解：取二定点的连线为 x 轴，二定点连接线段的中点作为坐标原点，设动点

$M(x,y,z)$，求的轨迹为C

则$M\left(x,y,z\right)\in C\Leftrightarrow\sqrt{(x-2)^2+y^2+z^2}+\sqrt{(x+2)^2+y^2+z^2}=8$

即$\sqrt{(x-2)^2+y^2+z^2}=8-\sqrt{(x+2)^2+y^2+z^2}$

两边平方且整理得：$(4^2-2^2)x^2+4^2y^2+4^2z^2=4^2(4^2-2^2)$ （1）

解（1）得：$12x^2+16y^2+16z^2=16\times12$

即：$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{12}=1$

19. 求两坐标面xOy和xOz所成二面角的平分面方程.

解：由题意知：所求的平分面上的点到两坐标平面xOy和xOz的距离相等.

因此点$M\ (x,y,z)$在平分面上的充要条件是$|z|=|y|$

所以 $z=\pm y$

则所求的平分面方程为$z+y=0$，$z-y=0$.

20. 建立球心在点$M_0(x_0,y_0,z_0)$、半径为R的球面方程.

解：设$M(x,y,z)$是球面上任一点，根据题意有

$|MM_0|=R$ 即$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=R$

所求方程为$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$

21. 写出各坐标平面、各坐标轴的方程.

解：xOy,yOz,xOz 平面的方程分别为$z=0,x=0,y=0$

x轴是xOy,xOz的交线，则x轴的方程为$\begin{cases}y=0\\z=0\end{cases}$

同理y轴、z轴的方程分别是$\begin{cases}x=0\\z=0\end{cases}$，$\begin{cases}y=0\\x=0\end{cases}$.

22. 已知两点$A\ (0,0,a),B\ (0,0,-a)$，求到它们距离平方和为$4a^2$的点的轨迹.

解：设轨迹上一点$P\ (x,y,z)$，则由题意得$|PA|^2+|PB|^2=4a^2$

则 $\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}+\sqrt{x^2+y^2+(z+a)^2}=4a^2$

即 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 即所求轨迹为一球面.

23. 导出到两点 $A(0,-5,0),B(0,5,0)$ 的距离之差为 6 的点的轨迹方程.

解：记轨迹上一点为 $P(x,y,z)$，则 $\left\|\overrightarrow{PA}\right|-\left|\overrightarrow{PB}\right\|=6$

代入数据得 $\left|\sqrt{x^2+(y-5)^2+z^2}-\sqrt{x^2+(y+5)^2+z^2}\right|=6$

平方的 $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{16}=-1$

24. 求平面 yOz 与以点 $C(5,-2,1)$ 为中心，半径为 13 的球面的交线的方程.

解：平面 yOz 的方程为 $x=0$

以点 $C(5,-2,1)$ 为中心，半径为 10 的球面方程为

$$(x-5)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=169$$

所求的交线为 $(y+2)^2+(z-1)^2=144$，即是 yOz 平面上以 $(-2,1)$ 为圆心，以 12 为半径的圆.

25. 求下列三个曲面的交点：

$$x^2+y^2+z^2=49,y-3=0,z+6=0$$

解：由题意知：$x^2+y^2+z^2=49,y-3=0,z+6=0$

联立曲面的方程得：$y=3,z=-6$ 代入 $x^2+y^2+z^2=49$

得 $x=\pm 2$

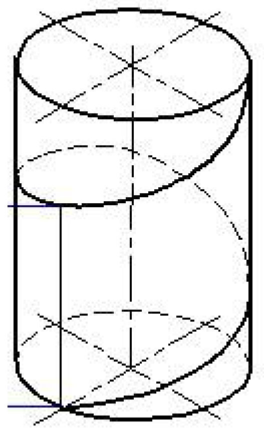
$\therefore$ 所求曲面的交点为 $(2,3,-6),(-2,3,-6)$

26. λ 取何值时直线 $\begin{cases}3x-y+2z-6=0\\x+4y-\lambda z-15=0\end{cases}$ 与 z 轴相交?

解：直线 $\begin{cases}3x-y+2z-6=0\\x+4y-\lambda z-15=0\end{cases}$ 与 z 轴相交，则有交点坐标为 $(0,0,z)$，

由直线方程得$\begin{cases}2z-6=0\\-\lambda z-15=0\end{cases}$，求得$\lambda=-5$

27. 一定点绕 z 轴做角速度为w的圆周运动，同时以速度v_0做平行于该直线的匀速直线运动，这个动点的轨迹称为圆柱螺线，求圆柱螺线的方程.



解：建立坐标系，设动点的起始位置为$A(a,0,0)$时刻t的位置为$p(x,y,z)$，则$z=v_0t$

设 p 点在xoy平面上的投影为 N，则$\angle P_0ON=wt$

$\therefore$ p点的坐标x,y,z满足$\begin{cases}x=a\cos wt\\y=a\sin wt\ (-\infty<t<\infty)\\z=v_0t\end{cases}$

记$wt=\theta$，则参数方程可转化为$\begin{cases}x=a\cos\theta\\y=a\sin\theta\ (-\infty<\theta<\infty)\\z=b\theta\end{cases}$

消去θ，得圆柱螺线的一般方程为$\begin{cases}x^2+y^2=a^2,\\y=a\sin\dfrac{z}{b}\end{cases}$

28. 平面曲线的普通方程$x^3+y^3-axy=0,(a>0)$化为参数方程.

解：令$y=tx,$代入方程$x^3+y^3-axy=0$

得$(1+t^3)x^3-atx^2=0$

$\Rightarrow x^2\left[\left(1+t^3\right)x-at\right]=0$

则$x=0$或$x=\dfrac{at}{1+t^3}$

当$x=0$时，$y=0;$当$x=\dfrac{at}{1+t^3}$时，$y=\dfrac{at^2}{1+t^3}$

故参数方程为$\begin{cases}x=\dfrac{at}{1+t^3}\\y=\dfrac{at^2}{1+t^3}\end{cases}$.

29. 求经过点 $(1,2,5)$ 并且与三个平面均相切的球面的方程.

解：由题意可知球面与三个平面均相切，则球面到平面的距离即半径的长度.

故可设球面方程为 $(x-a)^2+(y-a)^2+(z-a)^2=a^2$

将点 $(1,2,5)$ 得：$a=3$ 或 $a=5$

$\therefore$ 球面的方程为 $(x-3)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=3^2$ 和

$$(x-5)^2+(y-5)^2+(z-5)^2=5^2$$

30. 求旋轮线 $\begin{cases} x=t-\sin t, \\ y=1-\cos t. \end{cases}(0\le t\le 2\pi)$ 的弧与直线 $y=\dfrac{1}{2}$ 的交点.

解：将 $y=\dfrac{1}{2}$ 代入 $y=1-\cos t$ 得：$t=\pm\dfrac{\pi}{3}$

则代入 $x=t-\sin t$ 得 $x=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 或 $x=-\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore$ 交点坐标为 $\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ 和 $\left(-\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2}\right)$.

证明题

1. 证明参数方程为 $\begin{cases} x=\dfrac{t}{1+t^2+t^4}\cdots(1) \\ y=\dfrac{t^2}{1+t^2+t^4}\cdots(2) \\ z=\dfrac{t^4}{1+t^2+t^4}\cdots(3) \end{cases}$ 的曲线是球面曲线.

证明：由 $(1)^2+(2)^2+(3)^2$ 消去参数 t 得：

$$x^2+y^2+z^2=\frac{t^2+t^4+t^6}{1+t^2+t^4}=\frac{t^2}{1+t^2+t^4}=y$$

即 $x^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2+z^2=\dfrac{1}{4}$

由 $(2)^2-(1)\times(3)$ 得 $y^2-xz=0$

$\therefore$所求曲线的一般参数方程为$\begin{cases} x^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2+z^2=\dfrac{1}{4} \\ y^2-xz=0 \end{cases}$

所给曲线在球面$x^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2+z^2=\dfrac{1}{4}$上，所以这条曲线是球面曲线.

2. 证明曲线$x=t, y=2t, z=2t^2$所表示的曲线在曲面$2\left(x^2+y^2\right)=5z$上.

证明：把曲线方程$x=t, y=2t, z=2t^2$代入曲面方程的左右两边时，有左边$=10t^2$，右边$=5\cdot 2t^2=10t^2$，即左边=右边

$\therefore$曲线方程满足曲面方程，即曲线$x=t, y=2t, z=2t^2$所表示的曲线在曲面$2\left(x^2+y^2\right)=5z$上.

3. 任何一圆交等轴双曲线$xy=c^2$于四点$P(ct_1,\dfrac{c}{t_1})$, $Q(ct_2,\dfrac{c}{t_2})$, $R(ct_3,\dfrac{c}{t_3})$及$S(ct_4,\dfrac{c}{t_4})$.

那么一定有$t_1\cdot t_2\cdot t_3\cdot t_4=1$.

证明：设圆的方程$x^2+y^2+2Dx+2Ey+F=0$.

圆与等轴双曲线交点$(ct,\dfrac{c}{t})$,则代入得$c^2t^2+\dfrac{c^2}{t^2}+2Dct+\dfrac{2Ec}{t}+F=0.$

整理得: $c^2t^4+2Dct^3+Ft^2+2Ect+c^2=0.$

可知$(i=1,2,3,4)$是它的四个根,则有韦达定理$t_1\cdot t_2\cdot t\cdot_3 t_4=(-1)^4\dfrac{c^2}{c^2}=1$.

4. 设P,Q,R是等轴双曲线上任意三点,求证ΔPQR的重心H必在同一等轴双曲线上.

证明:设等轴双曲线的参数方程为$\begin{cases} x=ct \\ y=\dfrac{c}{t} \end{cases}$

设点P,Q,R的坐标为$P(x_1,y_1)$, $Q(x_2,y_2)$, $R(x_3,y_3)$.

则重心H $(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3},\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3})$

代入参数方程得：$y_1=\frac{c^2}{x_1}$ ，$y_2=\frac{c^2}{x_2}$，$y_3=\frac{c^2}{x_3}$

$\therefore$ 把$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$代入得$\frac{y_1+y_2+y_3}{3}=\frac{c^2}{\frac{x_1+x_2+x_3}{3}}$

$\therefore$ ΔPQR 的重心 H 必在同一等轴双曲线上.

5. 证明空间中到定点的距离等于定长的动点的集合是的轨迹是球面.

证明：根据题意记空间中的定点为点 $C(a,b,c)$，定长为 r

集合中的任意动点记为 $M(x,y,z)$

则依题意得 $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}=r$

即 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$ 这是球面的方程

故空间中到定点的距离等于定长的动点的集合是的轨迹是球面.