第一节　线性变换的定义

主要内容

- 引入
- 定义
- 举例
- 性质

一、引入

二、定义

定义 1 线性空间 V 的一个变换 A称为线性变换，如果对于 V 中任意的元素 α,β 和数域 P 中任意数 k，都有

$$\mathrm{A}(\alpha+\beta)=\mathrm{A}(\alpha)+\mathrm{A}(\beta),$$

$$\mathrm{A}(k\alpha)=k\mathrm{A}(\alpha).$$

以后一般用花体拉丁字母 $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \ldots$ 代表 V 的变换，$\mathcal{A}(\alpha)$ 或 $\mathcal{A}\alpha$ 代表元素 α 在变换 $\mathcal{A}$ 下的像.

定义中的等式所表示的性质，有时也说成**线性变换保持向量的加法与数量乘法.**

下面来看几个简单的例子，它们表明线性变换这个概念是有丰富的内容的.

三、举例

例1 平面上的向量构成实数域上的二维线性空间. 把平面围绕坐标原点按反时针方向旋转 θ 角就是一个线性变换, 用 R_θ 表示. 如果平面上一个向量 α 在直角坐标系下的坐标是 (x, y), 那么像 $R_\theta(\alpha)=\alpha'$ 的坐标.

问题1, 求 $R_\theta(\alpha)=\alpha'$ 的坐标.

设 α 旋转 θ 角之后的坐标 (x', y'), 则按照公式

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

问题2，旋转变换 $R_\theta(\alpha)=\alpha'$ 是不是线性变换？

同样地，空间中绕轴的旋转也是一个线性变换.

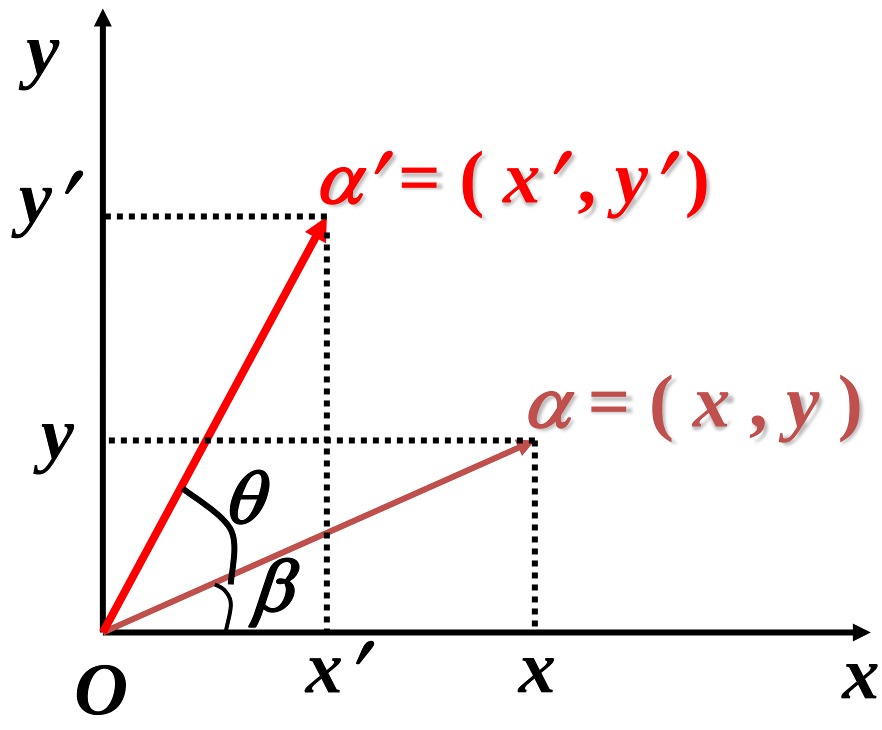


图 7 - 1

例 2 设 α 是几何空间中一固定的非零向量，把每个向量 ζ 变到它在 α 上的内射影的变换也是一个线性变换，以 Π_α 表示它. 用公式表示就是

$$\Pi_\alpha(\zeta) = \frac{(\alpha,\zeta)}{(\alpha,\alpha)}\alpha .$$

这里 $(\alpha,\zeta),(\alpha,\alpha)$ 表示内积. 几何意义如图 7-2 所示.

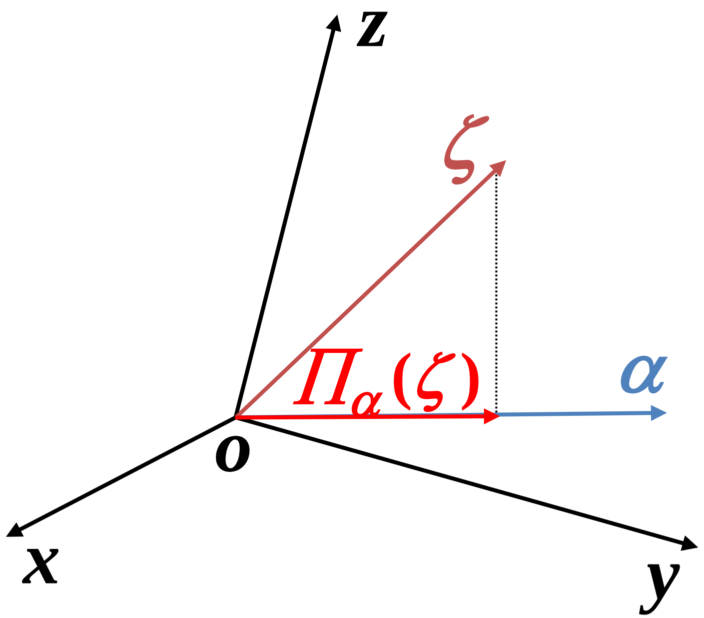


图 7-2

例 3　线性空间 V 中的**恒等变换**或称**单位变换 E**，即

$$\mathrm{A}(\alpha)=\alpha \qquad (\alpha\in V),$$

以及**零变换 0**，即

$$\mathbf{0}(\alpha)=0 \qquad (\alpha\in V)$$

都是线性变换.

例 4 设 V 是数域 P 上的线性空间，k 是 P 中某个数，定义 V 的变换如下：

$$\alpha \to k\alpha, \qquad \alpha \in V.$$

不难证明，这是一个线性变换，称为由数 k 决定的**数乘变换**，可用 K 表示。显然，当 $k=1$ 时，我们便得恒等变换，当 $k=0$ 时，便得零变换.

例 5　在线性空间 $P[x]$ 或者 $P[x]_n$ 中，求微商是一个线性变换. 这个变换通常用 $\mathcal{D}$ 代表，即

$$\mathcal{D}(f(x)) = f'(x).$$

例 6　定义在闭区间 $[a,b]$ 上的全体连续函数组成实数域上一线性空间，以 $C(a,b)$ 代表. 在这个空间中，变换

$$\mathcal{I}(f(x)) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

是一线性变换.

例 7　**镜象变换**：R^2 中每个向量关于过原点的直线 L 相对称的变换，记为T，即

$$\forall\ \alpha=\overrightarrow{OA}\in R^2,\quad T(\alpha)=\alpha'=\overrightarrow{OB}$$

(如图 7 - 3 所示，其中 A、B对称于直线 L) 也是 R^2 上的线性变换.

求镜象变换

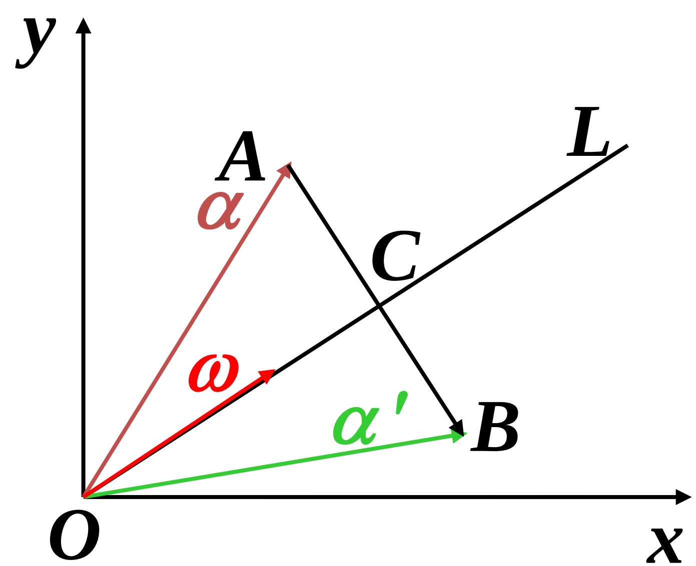
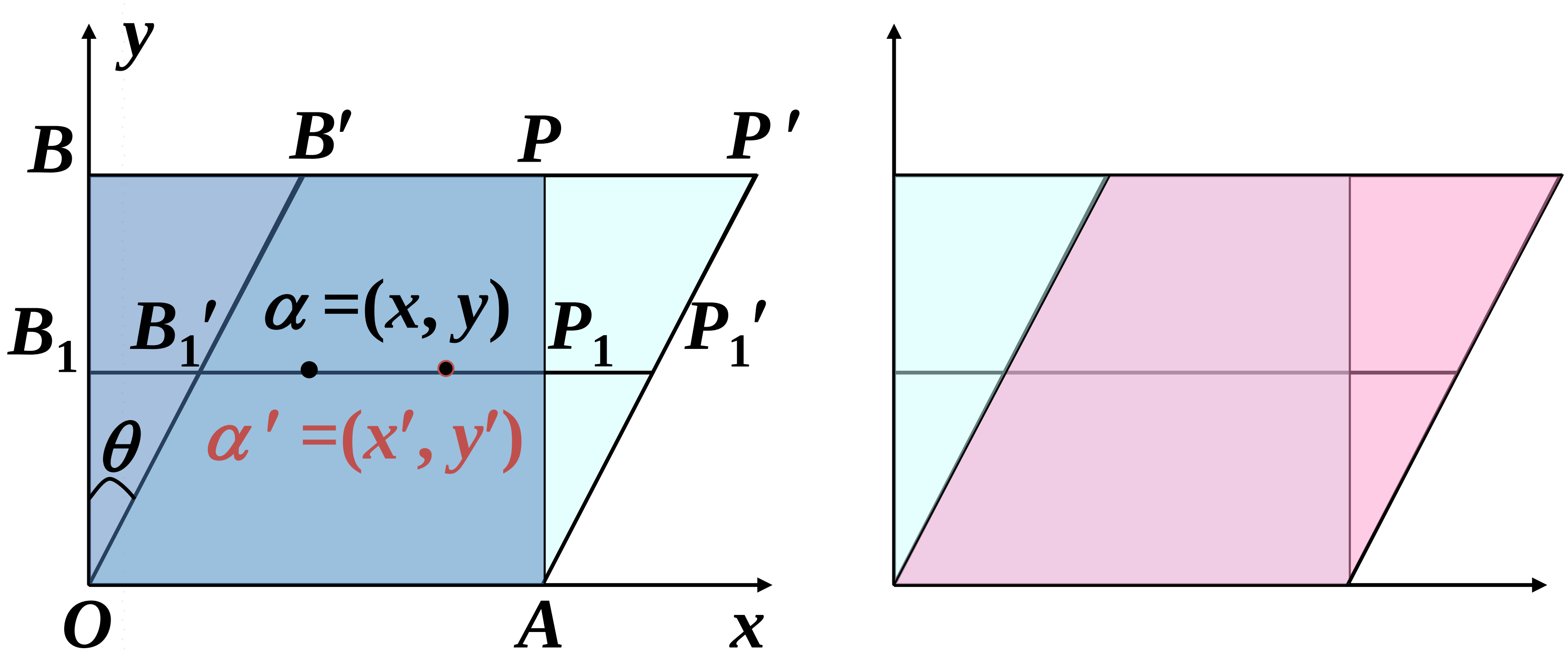


图 7 - 3

例 8　错切变换：把矩形 $OAPB$ 所围的平面区域变换为平行四边形 $OAP'B'$ 所围的平面区域的的变换，记为Q ，如图 7 - 4 所示.



求错切变换

图 7 - 4

四、性质

线性变换有以下三个简单性质:

性质 1 设 A 是 V 的线性变换，则

$$A(0)=0, \quad A(-\alpha)=-A(\alpha).$$

证明 由线性变换的定义，可得

$$A(0)=A(0\cdot\alpha)=0A(\alpha)=0,$$

$$A(-\alpha)=A((-1)\alpha)=(-1)A(\alpha)$$

$$=-A(\alpha).$$

性质 2 线性变换保持线性组合与线性关系式不变.

换句话说，如果 β 是 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ 的线性组合：

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_r\alpha_r ,$$

那么经过线性变换 A 之后， A(β) 是 A(α_1), A(α_2), …, A(α_r) 同样的线性组合：

$$A(\beta) = k_1 A(\alpha_1) + k_2 A(\alpha_2) + \ldots + k_r A(\alpha_r) .$$

又如果 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ 之间有关系式

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_r\alpha_r = 0 ,$$

那么它们的像之间也有同样的关系

$$k_1\mathrm{A}(\alpha_1)+k_2\mathrm{A}(\alpha_2)+\ldots+k_r\mathrm{A}(\alpha_r)=0.$$

以上两点，根据定义不难验证，由此即得

性质 3　线性变换把线性相关的向量组变成线性相关的向量组.

但应该注意，性质 3 的逆是不对的，线性变换可能把线性无关的向量组也变成线性相关的向量组. 例如零变换就是这样.