文山學院
WENSHAN UNIVERSITY

第五节　行列式的计算

主要内容

- 矩阵的定义
- 初等变换的定义
- 行阶梯形矩阵
- 行列式的计算方法

一、矩阵的定义

定义 5 由 $m \times n$ 个数 a_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$) 排成的 m 行 n 列的数表

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

叫做一个 $m \times n$ **矩阵**, 这 $m \times n$ 个数叫做矩阵的**元素**, a_{ij} 称为矩阵 A 的第 i 行第 j 列元素.

例如

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 \\ -9 & 8 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

３×４矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3i & 0 \\ -9 & 8i \\ 5 & -1 \\ 3i & 5 \end{pmatrix}$$

5×2矩阵

当一个矩阵的元素全是某一数域 P 中的数时它就称为这一**数域 P 上的矩阵**．上述两个矩阵一个是有理数域上的矩阵，一个是复数域上的.

$n \times n$ 矩阵也称 n 级**方阵**. 由一个 n 级方阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

定义的一个 n 级行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$,

称为**矩阵 A 的行列式**，记作 $|A|$.

利用消元的思想解下列线性方程

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_2 - 2x_3 = -5 \\ x_3 = 4 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}}$$

二、初等变换的定义

定义 6 下面三种变换称为数域 P 上矩阵的**初等行变换**:

(1) 对调两行(对调 i, j 两行, 记作 $r_i \leftrightarrow r_j$);

(2) 以 P 中一个数 $k \neq 0$ 乘以某一行中的所有元素(第 i 行乘以 k, 记作 kr_i);

(3) 把某一行所有元素的 k ($k \in P$)倍加到另一行对应的元素上去(第 j 行的 k倍加到第 i 行上,记作 $kr_j + r_i$).

把定义中的行换成列,即得矩阵的**初等列变换**的定义.

矩阵的初等行变换与初等列变换, 统称**初等变换**.

一个矩阵经初等行变换后，就变成了另一个矩阵.

矩阵 A 经过初等行变换变成矩阵B 时，记为

$$A \to B.$$

找出它们的共同特点

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

阶梯形矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

三、阶梯形矩阵

定义 满足下面两个条件的矩阵称为**阶梯形矩阵**:

(1) 任意一行从第一个元素起至该行的第一个非零元素所在的下方全为0.

(2) 如该行全为0，则它的下面的行也全为0.

例如

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

阶梯形矩阵的特点：阶梯线下方的元素全为零；每个台阶只有一行，台阶数即是非零行的行数；阶梯线的竖线(每段竖线的长度为一行)后面的第一个元素为非零元，也就是非零行的第一个非零元.

定理 每一个矩阵都可以经过单纯的初等行变换化为行阶梯形矩阵.

例 1 用矩阵的初等行变换化矩阵A为行阶梯形矩阵.

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & -4 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 8 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

四、行列式的计算方法

现在回过来讨论行列式的计算问题. 一个 n 级行列式可看成是由一个 n 级方阵 A 决定的，对于矩阵可以作初等行变换，而行列式的性质 2，6，7 正是说明了方阵的初等行变换对于行列式的值的影响. 每个方阵 A 总可以经过一系列的初等行变换变成阶梯形方阵 J. 由行列式的性质 2，6，7，对方阵每作一次初等行变换，相应地，行列式或者不变，或

者差一非零的倍数，也就是

$$|A| = k|J|, k \neq 0.$$

显然，行阶梯方阵的行列式都是上三角形的，因此 $|J|$的计算非常容易.

不难算出，用这个方法计算一个 n 级的数字行列式只需做 $\frac{n^3+2n-3}{3}$ 次乘法和除法. 特别当 n 比较大的时候，这个方法的优越性就更加明显了. 另外，这个方法完全是机械的，因而可以用计算机按这个方法来进行行列式的计算.

文山學院 WENSHAN UNIVERSITY

例 2 任意输入一个行列式，用矩阵的初等行变换把它变成上三角形行列式，并计算之.

$$D=\begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 13 & 7 \\ 3 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 8 & -7 & -10 \end{vmatrix}$$

小结和作业

1. 请叙矩阵的初等变换.

2. 利用矩阵的初等变换化行列式为上、下三角行列式中应注意哪些?

3.作业见学习通.