

《高等代数（2）》 授课教案

授课班级：***级数学与应用数学**班

授课教师：*****

授课时间：**年**月至**年**月

授课地点：星期**，**楼**教室

课程简介：《高等代数(2)》是数学与应用数学的专业必修课程,是数学专业考研究生入学考试的必考课程之一,也是理论性和应用性很强的一门数学基础课。其主要内容包括二次型、线性空间、线性变换、欧几里得空间等。讲授本课程的任务主要在于培养学生培养抽象的逻辑思维能力与推理论证能力;进一步掌握代数中的论证方法,熟练的运算能力与技巧,提高分析问题、解决问题的能力,为进一步学习其它后继课程打下坚实的基础。

教学目的：通过本课程的教学,使学生对高等代数乃至代数学的思想和方法有较深刻的认识,提高他们的抽象思维、逻辑推理和运算的能力;使学生初步掌握基本的、系统的代数知识和抽象的、严格的代数方法,进而加深对中学代数的理解;使学生能应用代数思想和方法去理解与处理有关的问题,培养与提高代数的理论分析问题与解决问题的能力;为学生今后学习近世代数、离散数学、数值计算、泛函分析等后续课程提供所需的基础理论知识;使学生在智能开发、创新能力培养等方面获得重要的平台。

教学要求：在整个教学过程中,加强基本运算能力、抽象思维能力、逻辑推理能力以及解决实际问题的能力的培养。通过本课程的教学,应使学生较系统地掌握高等代数的基础理论和基本方法,提高逻辑思维和推理论证能力,并具备较熟练的计算能力和分析问题的能力,为学习后继课程打下基础。主要以讲授为主、学生参与习题演练为辅等教学方式授课,期末以闭卷考试方式进行考核。

第五章 二次型

5.1 二次型及其矩阵表示

教学的时间: ****年**月**日

教学学时数:2 学时

一、教学目标

1. 理解二次型、线性替换的概念;
2. 掌握二次型与对称矩阵的一一对应关系;
3. 掌握矩阵的合同.

二、教学重点

1. 二次型及二次型的矩阵表示;
2. 非退化线性变换的作用.

三、教学难点

非退化线性变换的作用

四、教学过程

(一) 问题导入

在解析几何中, 当坐标原点与中心重合时, 一个有心二次曲线的一般方程是

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = f. \quad (1)$$

为了便于研究这个二次曲线的几何性质, 我们可以选择适当的角度 θ , 反时针方向转轴

$$\begin{cases} x = x' \cos \theta - y' \sin \theta, \\ y = x' \sin \theta + y' \cos \theta, \end{cases} \quad (2)$$

把方程(1)化成标准方程 $mx'^2 + ny'^2 = 1$.. 在二次曲面的研究中也有类似的情况.

例 1 求曲线 $5x^2 + 4xy + 5y^2 = 13$, 反时针方向转轴 45 度或 135 度, 代入曲线方程中可得 $7x'^2 + 3y'^2 = 13$ 或 $3x'^2 + 7y'^2 = 13$, 于是该曲线是一个椭圆.

(1) 的左端是一个二次齐次多项式. 从代数的观点看, 所谓化标准方程就是用变量的线性替换(2)化简一个二次齐次多项式, 使它只含平方项. 二次齐次多项式不但在几何中出现而且在数学的其它分支、物理、力学中也会碰到. 这一章将介绍它的一些基本的性质.

(二) 二次型的定义及其矩阵表示

1. 二次型的定义

设 P 是一数域, 一个系数在数域 P 中的 x_1, x_2, \dots, x_n 的二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n + a_{22}x_2^2 + \dots + 2a_{2n}x_2x_n + \dots + a_{nn}x_n^2 \quad (3)$$

称为数域 P 上的一个 n 元二次型, 简称二次型.

例如 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1x_2 + 3x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 3x_3^2$ 是有理数域上的一个三元二次型.

也可以说是实二次型或复二次型.

为了以后讨论上的方便, 在 (3) 中, $x_i x_j$ ($i < j$) 的系数写成 $2a_{ij}$, 而不简单的写成 a_{ij} .

2. 二次型的矩阵

令 $a_{ji} = a_{ij}, i < j$. 由于 $x_i x_j = x_j x_i$, 所以二次型 (3) 可以写成

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \dots + a_{1n}x_1x_n) + (a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{2n}x_2x_n) + \dots + (a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \dots + a_{nn}x_n^2) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_i x_j \quad (5)$$

把 (5) 的系数排成一个 $n \times n$ 矩阵 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, (6)

称之为二次型 (5) 的矩阵. 由 $a_{ij} = a_{ji}, i, j = 1, \dots, n$, 得 $A = A'$. 于是二次型的矩阵都是对称的.

例 2 已知二次型 $f(x, y) = x^2 + 4xy + y^2$, 求其矩阵 A .

例 3 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 - 3x_2^2 + x_3^2 - 4x_4^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 6x_1x_4 - 8x_2x_3 - 4x_2x_4$, 求其矩阵 A .

(三) 线性替换

1. 线性替换的定义 定义 1 设 $x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n$ 是两组文字, 系数在数域 P 中的一组关系式

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \dots + c_{1n}y_n, \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \dots + c_{2n}y_n, \\ \dots\dots\dots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \dots + c_{nn}y_n \end{cases} \quad (4)$$

称为由 x_1, \dots, x_n 到 y_1, \dots, y_n 的一个线性替换, 或简称线性替换.

若系数行列式 $|c_{ij}| \neq 0$, 则称线性替换 (4) 为非退化的.

若把 (2) 看作线性替换, 则它就是非退化的, 这是因为 $\begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} = 1 \neq 0$.

不难看出, 如果把 (4) 代入 (3), 那么得到的 y_1, \dots, y_n 的多项式仍然是二次齐次的. 换句话说, 线性替换把二次型变成二次型.

研究二次型在非退化的线性替换下的变化情况就是本章的主要目的. 在讨论二次型时, 矩阵是一个有力的工具, 因此先把二次型与线性替换用矩阵来表示.

2. 线性替换的矩阵表示

令 $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. 于是, 二次型可以用矩阵的乘积表示出来:

$$\begin{aligned} X'AX &= (x_1, x_2, \dots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= (x_1, x_2, \dots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_i x_j. \end{aligned}$$

故 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = X'AX$.

二次型 (3) 的矩阵 A 的元素, 当 $i \neq j$ 时 $a_{ij} = a_{ji}$ 正是它的 $x_i x_j$ 项的系数的一半, 而 a_{ii} 是 x_i^2 项的系数, 因此二次型和它的矩阵是相互唯一决定的. 由此还能得到, 若二次型

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = X'AX = X'BX$$

且 $A' = A, B' = B$, 则 $A=B$.

$$\text{令 } C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

于是线性替换 (4) 可以写成
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \text{ 或者 } X=CY.$$

(四) 矩阵的合同及其性质

经过一个退化的线性替换, 二次型还是变成二次型.

1. **问题 1:** 经过非退化的线性替换后的二次型与原来的二次型之间有什么关系, 也就是说, 找出替换后的二次型的矩阵与原二次型的矩阵之间的关系.

若二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = X'AX = X'BX$ 且 $A' = A, B' = B$, 则 $A = B$.

令
$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

于是线性替换 (4) 可以写成

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \text{ 或者 } X = CY.$$

经过一个非退化的线性替换, 二次型还是变成二次型, 替换后的二次型与原来的二次型之间有什么关系, 即找出替换后的二次型的矩阵与原二次型的矩阵之间的关系.

设 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = X'AX, A = A'$ (7)

是一个二次型, 作非退化线性替换

$$X = CY \tag{8}$$

得到一个 y_1, y_2, \dots, y_n 的二次型 $Y'BY$, 下面研究一下矩阵 A 与 B 的关系.

把(8)代入(7), 有 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = X'AX = (CY)'A(CY) = Y'C'ACY = Y'(C'AC)Y = Y'BY$. 矩阵

$C'AC$ 也是对称的, 由此即得 B 、 $C'AC$ 都是该二次型的矩阵, 所以 $B = C'AC$.

2. 矩阵的合同及其性质

定义 2 数域 P 上两个 n 阶矩阵 A, B 称为合同的, 如果有数域 P 上可逆的 $n \times n$ 矩阵 C , 使得

$$B = C'AC.$$

合同是矩阵之间的一个关系, 具有以下性质:

- 1) 自反性:任意矩阵 A 都与自身合同.
- 2) 对称性:如果 B 与 A 合同,那么 A 与 B 合同.
- 3) 传递性:如果 B 与 A 合同, C 与 B 合同,那么 C 与 A 合同.

因此, 经过非退化的线性替换,新二次型的矩阵与原来二次型的矩阵是合同的。这样把二次型的变换通过矩阵表示出来,为以下的讨论提供了有力的工具。

问题 2: 在变换二次型时,为什么总是要求所作的线性替换是非退化的?

从几何上看,这一点是自然的因为坐标变换一定是非退化的。一般地,当线性替换

$$X = CY$$

是非退化时,由上面的关系即得

$$Y = C^{-1}X.$$

这也是一个线性替换,它把所得的二次型还原.这样就使我们从所得二次型的性质可以推知原来二次型的一些性质.

五、小结

自己想想这次课主要学会了哪些内容?

六、作业 (习题册)

七、教学反思

5.2 二次型的标准型

教学的时间: ****年**月**日

教学学时数:4 学时

一、教学目标

掌握标准形的概念及化法

二、教学重点

化二次型为标准形的方法(配方法)

三、教学难点

化二次型为标准形的方法

四、教学过程

(一)问题导入

二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 经过非退化线性替换 $\mathbf{X}=\mathbf{CY}$ 化为只包含平方项的二次型

$$d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + \dots + d_nx_n^2. \quad (1)$$

称形如(1)为二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的一个标准形.

如何想办法把一般的二次型化为其标准形?

例 1 利用配方的思想化二次型 $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 6x_1x_2 + 2x_2^2$ 为标准型.

例 2 化二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 4x_1x_2 + 12x_2x_3$ 为标准型.

(提示: 令 $x_1 = y_1 - y_2, x_2 = y_1 + y_2$ 可以化为含有平方项)

问题: 任意一个二次型都可以经过非退化的线性替换化为标准形?

(二)配方法及其证明

定理 1 数域 P 上任意一个二次型都可以经过非退化线性替换变成平方和(1)的形式.

证明 (利用归纳法) 参见教材第 211—214 页

易知, 二次型 (1) 的矩阵是对角矩阵,

$$d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + \cdots + d_nx_n^2 = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

反过来, 矩阵为对角形的二次型就只包含平方项. 按上一节的讨论, 经过非退化的线性替换, 二次型的矩阵变到一个合同的矩阵, 因此用矩阵的语言, 定理 1 可以叙述为:

定理 2 在数域 P 上, 任意一个对称矩阵都合同于一对角矩阵.

定理 2 也就是说, 对于任意一个对称矩阵 A 都可以找到一个可逆矩阵 C 使 $C'AC$ 成对角矩阵.

3. 二次型的标准型

二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 经过非退化线性替换所变成的平方和称为 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的**标准形**.

例 3 利用配方法化二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$ 为标准形.

例 4 利用配方法化二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 化为标准形, 并求所用的线性替换及变换矩阵.

(三) 配方法的矩阵形式

如何将一个对称矩阵施行合同变换化为对角矩阵?

$$1. a_{11} \neq 0, \text{ 这时的变量替换为 } \begin{cases} x_1 = y_1 - \sum_{j=2}^n a_{11}^{-1} a_{1j} y_j, \\ x_2 = y_2, \\ \cdots \cdots \cdots \\ x_n = y_n. \end{cases} \quad \text{令 } C_1 = \begin{pmatrix} 1 & -a_{11}^{-1}a_{12} & \cdots & -a_{11}^{-1}a_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

则上述变量替换相应于合同变换 $A \rightarrow C_1'AC_1$

为计算 $C_1'AC_1$, 可令 $\alpha = (a_{12}, \cdots, a_{1n})$, $A_1 = \begin{pmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$. 于是 A 和 C_1 可写成分块矩阵

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \alpha \\ \alpha' & A_1 \end{pmatrix}, C_1 = \begin{pmatrix} 1 & -a_{11}^{-1}\alpha \\ O & E_{n-1} \end{pmatrix}$, 这里 α' 为 α 的转置, E_{n-1} 为 $n-1$ 级单位矩阵.

这样

$$C_1'AC_1 = \begin{pmatrix} 1 & O \\ -a_{11}^{-1}\alpha' & E_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \alpha \\ \alpha' & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -a_{11}^{-1}\alpha \\ O & E_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \alpha \\ O & A_1 - a_{11}^{-1}\alpha'\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -a_{11}^{-1}\alpha \\ O & E_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & O \\ O & A_1 - a_{11}^{-1}\alpha'\alpha \end{pmatrix}.$$

矩阵 $A_1 - a_{11}^{-1}\alpha'\alpha$ 是一个 $(n-1) \times (n-1)$ 对称矩阵, 由归纳法假定, 有 $(n-1) \times (n-1)$ 可逆矩阵

G 使 $G'(A_1 - a_{11}^{-1}\alpha'\alpha)G = D$ 为对角形, 令 $C_2 = \begin{pmatrix} 1 & O \\ O & G \end{pmatrix}$,

于是 $C_2' C_1' A C_1 C_2 = \begin{pmatrix} 1 & O \\ O & G' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & O \\ O & A_1 - a_{11}^{-1}\alpha'\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & O \\ O & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & O \\ O & D \end{pmatrix}$,

这是一个对角矩阵, 我们所要的可逆矩阵就是 $C = C_1 C_2$.

2. $a_{11} = 0$ 但只有一个 $a_{ii} \neq 0$.

这时, 只要把 A 的第一行与第 i 行互换, 再把第一列与第 i 列互换, 就归结成上面的情

形, 根据初等矩阵与初等变换的关系, 取 $C_1 = P(1, i) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & & & & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} i \text{ 行} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ i \text{ 列} \end{matrix}$

显然 $P(1, i)' = P(1, i)$. 矩阵 $C_1'AC_1 = P(1, i)AP(1, i)$ 就是把 A 的第一行与第 i 行互换, 再把第一列与第 i 列互换. 因此, $C_1'AC_1$ 左上角第一个元素就是 a_{ii} , 这样就归结到第一种情形.

3. $a_{ii} = 0, i = 1, 2, \dots, n$, 但有一 $a_{1j} \neq 0, j \neq 1$.

与上一情形类似, 作合同变换 $P(2, j)'AP(2, j)$

可以把 a_{1j} 搬到第一行第二列的位置, 这样就变成了配方法中的第二种情形. 与那里的变量

$$\text{替换相对应, 取 } C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{于是 } C_1'AC_1 \text{ 的左上角就是 } \begin{pmatrix} 2a_{12} & 0 \\ 0 & -2a_{12} \end{pmatrix},$$

也就归结到第一种情形.

$$4. \ a_{1j} = 0, j = 1, 2, \dots, n.$$

$$\text{由对称性, } a_{j1}, j = 1, 2, \dots, n. \text{ 也全为零. 于是 } A = \begin{pmatrix} 0 & O \\ O & A_1 \end{pmatrix},$$

A_1 是 $n-1$ 级对称矩阵. 由归纳法假定, 有 $(n-1) \times (n-1)$ 可逆矩阵 G 使 $G'A_1G = D$

成对角形. 取 $C = \begin{pmatrix} 1 & O \\ O & G \end{pmatrix}$, $C'AC$ 就成对角形.

例 5 利用矩阵的合同变换化二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$ 成标准形.

(四) 用初等变换的办法将二次型化为标准型

如何将一个对称矩阵施行合同变换化为对角矩阵?

由本节 P214 定理 2 知,对任意一个对称矩阵 A 都可以找到一个可逆矩阵 C 使 $C'AC$ 成为对角矩阵.由于 C 可逆,由第四章定理 6(p191)知,存在初等矩阵 P_1, P_2, \dots, P_k , 有

$$C = P_1 P_2 \cdots P_k$$

于是

$$(P_1 P_2 \cdots P_k)' A (P_1 P_2 \cdots P_k) = P_k' \cdots P_2' P_1' A P_1 P_2 \cdots P_k \quad (*)$$

为对角矩阵.

这说明,任意一个实对称矩阵 A ,可以经过一系列相同类型的初等行、列变换化为对角形矩阵.这里所谓的相同类型的初等行、列变换指的是:每对 A 进行一次行变换,紧接着对 A 进行一次相同类型的列变换.

又因为 $C = P_1 P_2 \cdots P_k = E P_1 P_2 \cdots P_k$ 所以,对 A 作的列变换同样施加于 E ,即得变换矩阵 C .于是就有

用初等变换法化二次型为标准形的方法是:将二次型的矩阵 A 与单位矩阵 E 构造矩阵 B

$$B = \begin{pmatrix} A \\ \hline E \end{pmatrix} \text{对 } B \text{ 作相同的初等行、列变换,直到 } B \text{ 中的子块 } A \text{ 成为对角矩阵,则 } B$$

中原来对应于 E 的部分即为线性变换矩阵.对角矩阵的主对角线上的元素即为标准形的系数.

例 6 用初等变换法化二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$ 为标准形.

解 该二次型对应的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$. 构造矩阵 B

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

所以二次型的标准形为 $f = 2y_1^2 - 2y_2^2 + 6y_3^2$, 所用线性替换为 $\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 + 3y_3, \\ x_2 = y_1 + y_2 - y_3, \\ x_3 = y_3. \end{cases}$

思考: 1. 用初等变换法化二次型 $f = -12x_1^2 - 3x_2^2 - 12x_3^2 + 12x_1x_2 - 24x_1x_3 + 8x_2x_3$ 为标准形.

2. 想想不同的同学施行的合同变换不一样, 最后得到的对角矩阵不同, 即二次型的标准型不一样, 但有哪些的共同的特征, 能否把它们统一成同一个对角矩阵呢?)

五、小结

1. 学会用配方法化二次型为其标准型了吗?
2. 你能把对称矩阵利用合同变换化为对角矩阵了吗?

六、作业 (习题册)

七、教学反思

5.3 唯一性

教学的时间: ****年 月 日

教学学时数:2 学时

一、教学目标

1.掌握复数、实数域上二次型的规范形的唯一性; 2.掌握惯性定理及其作用.

二、教学重点 实二次型和复二次型的规范形

三、教学难点 惯性定理的证明

四、教学过程

(一) 问题引入 二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 经非退化的线性替换 $X = CY$ 得到一个 y_1, y_2, \dots, y_n 的二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = X'AX = (CY)'A(CY) = Y'C'ACY = Y'(C'AC)Y$. 这说明经过非退化的线性替换之后的二次型的矩阵为 $C'AC$. 由于线性替换 $X = CY$ 是非退化的, 从而 C 可逆, 所以矩阵 $C'AC$ 与 A 的秩相等. 这就是说, 经过非退化线性替换后, 二次型矩阵的秩是不变的. 标准形的矩阵是对角矩阵, 而对角矩阵的秩就等于它对角线上不为零的平方项的个数. 因之, 在一个二次型的标准形中, 系数不为零的平方项的个数是唯一确定的, 与所作的非退化线性替换无关, 称二次型矩阵的秩为二次型的秩.

二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$ (上次课的例题) 要求学生作线性替换 $X = CY$. 第 1 组 $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; 第 2 组 $C = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 3 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 第 3 组 $C = \begin{pmatrix} 1 & -6 & \frac{1}{2} \\ 0 & -10 & 1 \\ \frac{1}{2} & -2 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$;

3 个组的同学得到的二次型不一样, 这说明二次型的标准形不是唯一的, 而与所作的非退化线性替换有关. 要求同学想想有没有办法统一.

下面只就复数域与实数域的情形来进一步讨论唯一性的问题.

(二) 复数域的情形

设 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是一个复系数的二次型, 由本章定理 1, 经过一适当的非退化线性替换后, $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 变成标准形, 不妨假定化的标准形是

$$d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \dots + d_ry_r^2, d_i \neq 0, i = 1, 2, \dots, r. \quad (1)$$

易知 r 就是 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的矩阵的秩. 因为复数总可以开平方, 再作一非退化线性替换

$$\begin{cases} y_1 = \frac{1}{\sqrt{d_1}} z_1 \\ \dots\dots\dots \\ y_r = \frac{1}{\sqrt{d_r}} z_r \\ y_{r+1} = z_{r+1} \\ \dots\dots\dots \\ y_n = z_n \end{cases} \quad (2)$$

(1)就变成

$$z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_r^2 \quad (3)$$

(3)就称为复二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的规范形.显然, 规范形完全被原二次型矩阵的秩所决定, 因此有

定理 3 任意一个复系数的二次型经过一适当的非退化线性替换可以变成规范形, 且规范形是唯一的.

定理 3 换个说法就是, 任一复数的对称矩阵合同于一个形式为 $\text{diag}(1, 1, \dots, 1, 0, 0, \dots, 0)$ 的对角矩阵, 其中 1 的个数为 r 个, r 是该二次型的秩. 从而有**两个复数对称矩阵合同的充要条件是它们的秩相等.**

(三) 实数域的情形

设 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是一实系数的二次型.由本章定理 1, 经过某一个非退化线性替换, 再适当排列文字的次序, 可使 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 变成标准形

$$d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \dots + d_p y_p^2 - d_{p+1} y_{p+1}^2 - \dots - d_r y_r^2, \quad (4)$$

其中 $d_i > 0, i = 1, 2, \dots, r; r$ 是 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的矩阵的秩.因为在实数域中, 正实数总可以开平方, 所以再作一非退化线性替换

$$\begin{cases} y_1 = \frac{1}{\sqrt{d_1}} z_1, \\ \dots\dots\dots \\ y_r = \frac{1}{\sqrt{d_r}} z_r, \\ y_{r+1} = z_{r+1}, \\ \dots\dots\dots \\ y_n = z_n, \end{cases} \quad (5)$$

(4) 就变成:

$$z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \dots - z_r^2, \quad (6)$$

(6)就称为实二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的规范形.显然规范形完全被 r, p 这两个数所决定.

定理 4 任意一个实数域上的二次型, 经过一适当的非退化线性替换可以变成规范形, 且规范形是唯一的. (这个定理通常称为**惯性定理**)

定义 3 在实二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的规范形中, 正平方项的个数 p 称为 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的正惯性指数; 负平方项的个数 $r - p$ 称为 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的负惯性指数; 它们的差 $p - (r - p) = 2p - r$ 称为 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的符号差.

虽然实二次型的标准形不是唯一的, 但是由上面化成规范形的过程可以看出, 标准形中系数为正的平方项的个数与规范形中正平方项的个数是一致的, 因此, 惯性定理也可以叙述为: **实二次型的标准形中系数为正的平方项的个数是唯一的, 它等于正惯性指数, 而系数为负的平方项的个数就等于负惯性指数.**

(四) 实数域、复数域上对称矩阵与

定理 5 (1) 任一复对称矩阵 A 都合同于一个下述形式的对角矩阵:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

其中对角线上 1 的个数等于 A 的秩.

(2) 任一实对称矩阵 A 都合同于一个下述形式的对角矩阵:

$$\begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_{r-p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其中对角线上 1 的个数 p 及 -1 的个数 $r - p$ (r 等于 A 的秩) 都是唯一确定的, 分别称为 A 的正、负惯性指数, 它们的差 $2p - r$ 称为 A 的符号差.

例 1 在实数域和复数域化二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$ 为规范形, 并指出其正惯性指数、负惯性指数、符号差、秩. (之前的例题)

例 2 在实数域和复数域化二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 3x_2^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$ 为规范形, 并指出其正惯性指数、负惯性指数、符号差、秩.

五、小结

- 1.实二次型和复二次型化为规范型如何处理?
- 2.如何计算二次型的惯性指数以及符号差?

六、作业 (习题册)

七、教学反思

5.4 正定二次型

教学的时间: ****年 月 日

教学学时数: 2 学时

一、教学目标

1. 掌握正定二次型与正定阵的概念和判别法.

二、教学重点

正定二次型定义与正定阵的判别法.

三、教学难点

正定二次型与正定矩阵的判别法

四、教学内容

正定二次型与正定矩阵在工程技术和最优化等问题中有着广泛的应用, 讨论多元函数极值的充分条件也要用到它. 在这一节中, 本节给出它的定义以及常用的判别条件.

(一) 正定二次型的定义

1. 定义 4 实二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 称为**正定的**, 如果对于任意一组不全为零的实数 c_1, c_2, \dots, c_n 都有 $f(c_1, c_2, \dots, c_n) > 0$.

例 1 判断下列实二次型是不是正定的?

$$(1) f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$$

$$(2) f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2$$

2. 两个基本结论

(1) 实二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + \dots + d_nx_n^2$ 正定的充要条件是 $d_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$.

(2) 设 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是实二次型, 经过非退化实线性替换会不会改变正定性?

$$\text{设实二次型 } f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j, a_{ij} = a_{ji}, \quad (1)$$

是正定的, 经过非退化实线性替换 $X = CY$ (2)

$$\text{变成二次型 } g(y_1, y_2, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} y_i y_j, b_{ij} = b_{ji}, \quad (3)$$

则 y_1, y_2, \dots, y_n 的二次型 $g(y_1, y_2, \dots, y_n)$ 也是正定的吗?

令 y_1, y_2, \dots, y_n 分别等于 k_1, k_2, \dots, k_n 且不全为零, 由 $X = CY$ 即
$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \dots \\ k_n \end{pmatrix}$$
 得到

c_1, c_2, \dots, c_n 不全为零. 若不然由于 C 可逆, 则齐次线性方程组 $CK = 0$ 得 k_1, k_2, \dots, k_n 只能全为零, 这矛盾了.

又因为 $f(c_1, c_2, \dots, c_n) = (c_1, c_2, \dots, c_n)A \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix} = (k_1, k_2, \dots, k_n)C'AC \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \dots \\ k_n \end{pmatrix} = g(k_1, k_2, \dots, k_n)$

以及 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是正定的, 所以 $g(y_1, y_2, \dots, y_n) > 0$.

非退化实线性替换保持正定性不变.

如何判断一个二次型是不是正定的? 用定义吗?

(二)、正定二次型的判别以及正定矩阵相关概念

1. 惯性指数法

定理 6 实数域上二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是正定的 \iff 它的正惯性指数等于 n .

证明 设二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 经过非退化实线性替换变成标准形

$$d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \dots + d_n y_n^2 \quad (4)$$

$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 当且仅当(4)是正定的, 而(4)是正定的充要条件 $d_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$.

定理 6 说明, 正定二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的规范形为

$$y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2 \quad (5)$$

定义 5 如果二次型 $X'AX$ 正定, 则称实对称矩阵 A 称为正定的.

因为二次型 (5) 的矩阵是单位矩阵 E , 所以 一个实对称矩阵是正定的 \iff 它与单位矩阵合同.

推论 1 实对称矩阵 A 正定的充要条件是存在可逆矩阵 C , 使得 $A = C^T C$.

证明 (必要性) 构造一个 k 元二次型 $f_k(x_1, x_2, \dots, x_k) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k a_{ij} x_i x_j$ $k=1, 2, \dots, n$. (只需

证该 k 元二次型正定的从而其行列式大于 0.)

对于任意不为零的数组 c_1, c_2, \dots, c_k 有 $f_k(c_1, c_2, \dots, c_k) = f(c_1, c_2, \dots, c_k, 0, \dots, 0)$, 这里 $c_1, c_2, \dots, c_k, 0, \dots, 0$ 不全为零, $f(c_1, c_2, \dots, c_k, 0, \dots, 0) > 0$. 这就证明了正定二次型的矩阵 A 的顺序主子式全大于零.

(充分性)用数学归纳法证明

当 $n=1$ 时, $f(x) = a_{11} x_1^2$, 由条件 $a_{11} > 0$ 显然有 $f(x)$ 是正定的.

假设充分性的论断对于 $n-1$ 元二次型已成立, 现在来证 n 元的情形.

矩阵 A 可以分块成 $A = \begin{pmatrix} A_1 & \alpha \\ \alpha^T & a_{nn} \end{pmatrix}$ 既然 A 的顺序主子式全大于零, 当然 A_1 的顺序主子式也全大于零.

由归纳法假设, A_1 是正定矩阵, 换句话说, 有可逆的 $n-1$ 级矩阵 G 使 $G^T A_1 G = E_{n-1}$

$$\text{令 } C_1 = \begin{pmatrix} G & O \\ O & 1 \end{pmatrix}, \text{ 于是 } C_1^T A C_1 = \begin{pmatrix} G^T & O \\ O & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & \alpha \\ \alpha^T & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G & O \\ O & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{n-1} & G^T \alpha \\ \alpha^T G & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

$$\text{再令 } C_2 = \begin{pmatrix} E_{n-1} & -G^T \alpha \\ O & 1 \end{pmatrix}, \text{ 有}$$

$$C_2^T C_1^T A C_1 C_2 = \begin{pmatrix} E_{n-1} & O \\ -\alpha^T G & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{n-1} & G^T \alpha \\ \alpha^T G & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{n-1} & -G^T \alpha \\ O & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{n-1} & O \\ O & a_{nn} - \alpha^T G G^T \alpha \end{pmatrix}$$

取 $C = C_1 C_2$, $a_{nn} - \alpha^T G G^T \alpha = a$, 就有 $C^T A C = \text{diag}(1, 1, \dots, 1, a)$ 两边取行列式, $|C| |A| = a$.

由条件 $|A| > 0$ 得 $a > 0$. 这就说明, 矩阵 A 与单位矩阵合同, 所以, A 是正定矩阵, 或者说

二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j = X^T A X$ 是正定的.

例 4 判定二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1 x_2 + x_2 x_3$$

是否正定.

方法一 用定理 7 顺序主子式是否全大于零判断

方法二 把该二次型化为标准型或规范型, 看正惯性指数是否等于 3.

(三) 实二次型的其他类型及其判别法

定义 7 设 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是一实二次型, 如果对于任意一组不全为零的实数 c_1, c_2, \dots, c_n 都有 $f(c_1, c_2, \dots, c_n) < 0$, 那么 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 称为负定的; 如果都有 $f(c_1, c_2, \dots, c_n) \geq 0$, 那么 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 称为半正定的; 如果都有 $f(c_1, c_2, \dots, c_n) \leq 0$, 那么 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 称为半负定的; 如果它既不是半正定又不是半负定, 那么 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 就称为不定的.

由定理 7 不难看出负定二次型的判别条件. 这是因为当 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是负定时, $-f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 就是正定的.

定理 8 对于实二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = X'AX$, 其中 A 是实对称的, 下列条件等价:

- (1) $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是半正定的;
- (2) 它的正惯性指数与秩相等;
- (3) 有可逆实矩阵 C , 使

$$C'AC = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$$

其中 $d_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n$;

- (4) 有实矩阵 C 使 $A = C'C$.
- (5) A 的所有 主子式 皆大于或等于零。(不是顺序主子式而是主子式)

注意, 在 (5) 中, 仅有顺序主子式大于或等于零是不能保证半正定性的. 例如

$$f(x_1, x_2) = -x_2^2 = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

中其顺序主子式都等于, 但是很显然这是半负定二次型, 而且是半正定的.

例 5 判定二次型 $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = -5x_1^2 - 6x_2^2 - 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3$ 正定性. (负定的)

五、小结

1 请叙述二次型正定、矩阵的正定的定义.

2.归纳判断二次型是否为正定二次型的方法?

六、作业 (习题册)

七、教学反思