第二章 行列式

教学的时间：2020 年 月 日 **教学学时数:1 学时**

2.1 引言

一、教学目标

1. 理解线性方程组的定义.
2. 掌握 2 元和 3 元的线性方程组解的形式，会猜想 Crammer 法则.
3. 掌握二阶和三阶行列式.

二、教学重点

1. 2 元和 3 元的线性方程组解的形式以及猜想 Crammer 法则.
2. 二阶和三阶行列式.

三、教学难点

二阶和三阶行列式

四、教学过程

1. 线性方程组

形如$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$，（其中 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是未知量，a_{ij},b_i 是数域 P 上的常数）的方程组称为数域 P 上的线性方程组.

当 $b_1=b_2=\cdots=b_m=0$ 时，称该方程组为齐次线性方程组.

2. 二元线性方程组$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 & (1) \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 & (2) \end{cases}$

$(1)\times a_{22}: a_{11}a_{22}x_1+a_{12}a_{22}x_2=b_1a_{22},$

$(2)\times a_{12}: a_{12}a_{21}x_1+a_{12}a_{22}x_2=b_2a_{12}$, 两式相减消去 x_2 得：

$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2$， 同理可得

$\left(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\right)x_2=a_{11}b_2-b_1a_{21}$，当$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$时，原方程组有唯一解

$x_1=\dfrac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$，　　$x_2=\dfrac{b_2a_{11}-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$，称$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$为**二级行列式**，

用符号表示为$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=D$

于是上述解可以用二级行列式叙述为：

方程组$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases}$中，当系数行列式$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\neq 0$时，该方程组有唯一解，且

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}=\dfrac{D_1}{D} \\ x_2=\dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}=\dfrac{D_2}{D} \end{cases}.$$

对于三元线性方程组有相仿的结论.设有三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3. \end{cases}$$

称代数式$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$为三级行列式，用符号表示为：

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

当三级行列式

$$d=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\neq 0$$

时，上述三元线性方程组有唯一解，解为

$$x_1=\frac{d_1}{d}\ ,\ x_2=\frac{d_2}{d}\ ,\ x_3=\frac{d_3}{d}\ ,$$

其中

$$d_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},d_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},d_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}\ .$$

问题：能否把这个结果推广到n元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

的情形.为此，首先给出n级行列式的定义并讨论它的性质，这是本章的主要内容.

3. 自然科学与工程技术中，常常会碰到未知数的个数很多的线性方程组——

如 n 元一次线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$　　（*）

它的解是否也有类似的结论呢？

为此，本章依次解决如下问题：

1）怎样定义 n 级行列式

2）n 级行列式的性质与计算？

3）方程组(*)在什么情况下有解？

有解的情况下，如何表示此解？

五、小结

1. 会计算二阶和三阶行列式吗？

2. 2 个未知量或 3 个未知量的而且方程的个数和未知量个数相同的线性方程组的系数行列式不等于 0，该方程组的解如何表示？

六、作业（习题册）

七、教学反思

教学的时间：2020 年 月 日 **教学学时数:1 学时**

2.2 排列

一、教学目标

1. 理解排列、逆序数、奇偶排列的定义.

2. 掌握排列的奇偶性与对换的关系.

二、教学重点

排列、逆序数、奇偶排列的定义

三、教学难点

排列逆序数的计算

四、教学过程

1．排列的定义

定义 1 由$1,2,\cdots,n$组成的一个有序数组称为一个n级排列.

例如：2431 是一个 4 级排列，45321 是一个 5 级排列.

所有不同的n级排列共有n！个.

显然$12\cdots n$也是一个n级排列，这个排列具有自然顺序，就是按递增的顺序排起来的；其它的排列或多或少地破坏自然顺序.

2．逆序数的定义

定义 2 在一个排列中，如果一对数的前后位置与大小顺序相反，即前面的数大于后面的数，那么它们就称为一个逆序，一个排列中逆序的总数就称为这个排列的**逆序数**. 排列$j_1j_2\cdots j_n$的逆序数记为$\tau(j_1j_2\cdots j_n)$.

3. 逆序数是计算方法

例 1．$\tau(31542)=5$ 逆序有：31，32，54， 52， 42

$\tau(35412)=7$ 逆序有：31，31，54，51，52，41，42.

例 2．求 n 级排列 $n(n-1)\cdots321$ 及 $1\cdot2\cdots\cdot(n-1)n$ 的逆序数.

解：$\tau(n(n-1)\cdots321)=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\dfrac{n(n-1)}{2}$ $\qquad\tau(123\cdots n)=0$

4. 奇排列和偶排列的定义

定义 3 逆序数为偶数的排列称为**偶排列**；逆序数为奇数的排列称为**奇排列.**

应该指出，我们同样可以考虑由任意 n 个不同的自然数所组成的排列，一般也称为 n 级排列. 对这样一般的 n 级排列，同样可以定义上面这些概念.

5. 排列的奇偶性

把一个排列中某两个数的位置互换，而其余的数不动，就得到另一个排列. 这样一个变换称为一个**对换**. 显然，如果连续施行再次相同的对换，那么排列就还原了. 由此得知，一个对换把全部 n 级排列两两配对，使每两个配成对的 n 级排列在这个对换下互变.

定理 1 对换改变排列的奇偶性.

这就是说，经过一次对换，奇排列变成偶排列，偶排列变成奇排列.

推论 在全部 n 级排列排列中，奇、偶排列的个数相等，各有 $n!/2$ 个.

定理 2 任意一个 n 级排列与排列 $12\cdots n$ 都可以经过一系列对换互变，并且所作对换的个数与这个排列有相同的奇偶性.

五、小结

1. 能否叙述排列、逆序数、奇偶排列的定义？
2. 给一个排列会不会计算其逆序数？
3. 对换是否改变排列的奇偶性？

六、作业（习题册）

下次课预习要点：n 阶行列式的定义

七、教学反思

教学的时间：2020 年 月 日 **教学学时数:2 学时**

2.3 n 级行列式

一、教学目标

1. 掌握 n 级行列式的定义和性质 1.
2. 能熟练地应用行列式的定义和性质来计算和证明有关的行列式.

二、教学重点

n 级行列式的定义与简单行列式的计算.

三、教学难点

1. n 级行列式的定义.
2. n 级行列式中非标准次序项的符号的确定.

四、教学过程

1. n级行列式的概念

给出n级行列式的定义之前，先回顾一下二级和三级行列式的定义.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \tag{1}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \tag{2}$$

由此可以看出二阶和三阶行列式有哪些特征？

（1）二阶和三阶行列式所含的项数是多少项的代数和？

（2）二阶和三阶行列式的每一项里包含几个数的乘积？每一项的行标和列标所具有的特征？（这个就意味着每一项乘积都是由行列式中位于不同的行和不同的列的元素构成的）

（3）每一项的符号如何确定？

在三级行列式的展开式(2)中，项的一般形式可以写成

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}, \tag{3}$$

其中 $j_1j_2j_3$ 是 1，2，3 的一个排列. 可以看出，当 $j_1j_2j_3$ 是偶排列时. 对应的项在(2)中带有正号，当 $j_1j_2j_3$ 是奇排列时带有负号.

定义 4 n 级行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{4}$$

等于所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{5}$$

的代数和，这里 $j_1j_2\cdots j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，每一项(5)都按下面规则带有符号：（1）当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是偶排列时，(5)带有正号，

（2）当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是奇排列时，(5)带有负号.

这样 n 级行列式的定义可写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}, \tag{6}$$

这里 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 n 级排列求和. 数 a_{ij} 称为行列式处于第 i 行第 j 列的元素，i 称为**行指标**，j 称为**列指标.**

定义表明，为了计算 n 级行列式，首先作所有可能由位于不同行不同列元素构成的乘积. 把构成这些乘积的元素按行指标排成自然顺序，然后由列指标所成的排列的奇偶性来决定这一项的符号.

例 1. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(1234)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} = 24$

例 2. $$\begin{vmatrix} 0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&2&0\\ 0&0&0&3&0&0\\ 0&0&4&0&0&0\\ 0&5&0&0&0&0\\ 6&0&0&0&0&0 \end{vmatrix}=(-1)^{\tau(654321)}a_{16}a_{25}a_{34}a_{43}a_{52}a_{61}=-6!=-72$$

例 3. $$\begin{vmatrix} 0&1&&&\\ &0&1&&\\ &&\ddots&\ddots&\\ &&&\ddots&n-1\\ n&&&&0 \end{vmatrix}=(-1)^{n-1}n!$$

例 4. $$\begin{vmatrix} &&&1&0\\ &&2&0&\\ &\iddots&\iddots&&\\ n-1&\iddots&&&\\ 0&&&&n \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}n!$$

一般地 $$\begin{vmatrix} d_1&&&\\ &d_2&&\\ &&\ddots&\\ &&&d_n \end{vmatrix}=d_1d_2\cdots d_n$$ （对角形行列式）

类似可得上三角形行列式 $$\begin{vmatrix} a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\ 0&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ 0&0&\cdots&a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \qquad (8)$$

主对角线

这两个行列式就等于主对角线（从左上角到右下角这条对角线）上元素的乘积. 特别主对角线以外的元素全为零的行列式称为**对角形行列式.** 对角形行列式的值等于主对角线上元素的乘积.

例 5. (1) 已知 $f(x)=\begin{vmatrix} x&1&1&2\\ 1&x&1&-1\\ 3&2&x&1\\ 1&1&2x&1 \end{vmatrix}$，求 x^3 的系数.

(2) $D_4=\begin{vmatrix} x & 2 & -1 & 3x \\ 4 & -5x & 2 & -5 \\ 2x & 1 & -2x & 3 \\ 1 & x & 4x & 2 \end{vmatrix}$, 问：该行列式的展开式是几次多项式，并求最高次幂的系数.

解 (1) 由 n 级行列式定义， $f(x)$ 是一个 x 的多项式函数，且最高次幂为 x^3．显然含 x^3 的项有两项： $(-1)^{\tau(1234)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ 与 $(-1)^{\tau(1243)}a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}$， 即 x^3 与 $-2x^3$

$\therefore$ $f(x)$ 中 x^3 的系数为－1.

(2) 由行列式的定义，知 $D_4=\sum(-1)^{\tau(p_1p_2p_3p_4)}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4}$, 显然，只有当 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4}$ 都含有 x 时，其乘积的次数才最高，且为 4．第一行有 2 个元素含有 x ，即为 $a_{11}=x, a_{14}=3x.$， 当 $a_{11}=x, a_{22}=-5x, a_{33}=-2x, a_{44}=2$ 时，此时它们的乘积等于 20x^3

当 $a_{14}=3x, a_{22}=-5x, a_{31}=2x, a_{43}=4x$ 时, 其乘积等于 $-120x^4$, 列标排列为 4213, 逆序数为 4. 故所求的最高幂的系数为-120, 它是 4 次多项式.

容易看出，当行列式的元素全是数域中的数时，它的值也是数域中的一个数.

2． 行列式的性质

在行列式的定义中，为了确定每一项的正负号，把个元素按行指标排起来. 事实上，数的乘法是交换的，因而这个元素的次序是可以任意写的，一般地，n 级行列式中的项可以写成

$$a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}, \qquad (11)$$

其中 $i_1i_2\cdots i_n$, $j_1j_2\cdots j_n$ 是两个 n 级排列. 利用排列的性质，不难证明，(11) 的符号等于

$$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}. \qquad (12)$$

按(12)来决定行列式中每一项的符号的好处在于，行指标与列指标的地位是对称的，因而为了决定每一项的符号，同样可以把每一项按列指标排起来，于是定义又可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}. \qquad (15)$$

由此即得行列式的下列性质：

性质 1 行列互换，行列式不变. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (16)$$

证：记右端$=\Delta(b_{ij})$，其中$b_{ij}=a_{ji}$，$i,j=1,2,\cdots,n$

$$\Delta(b_{ij}) = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} b_{i_1 1} b_{i_2 2} \cdots b_{i_n n} = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{1 i_1} a_{2 i_2} \cdots a_{n i_n} = \text{左端}$$

性质 1 表明，在行列式中行与列的地位是对称的，因之凡是有关行的性质，对列也同样成立.

例如由(8)即得下三角形的行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

附：**转置行列式**：设$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

称为D的**转置行列式**，记作D'或D^T.

五、小结

1. 叙述 n 级行列式的定义.
2. 如何确定行列式任意项的符号.
3. 行列式其转置行列式的关系

六、作业（习题册）

下次课预习要点：行列式的性质

七、教学反思

教学的时间：2020 年 月 日 **教学学时数:2 学时**

2.4 n 级行列式的性质

一、教学目标

1. 掌握行列式的基本性质。
2. 利用行列式性质进行计算行列式。

二、教学重点

行列式的基本性质

三、教学难点

利用行列式性质进行计算行列式

四、教学过程

1. 新课导入

行列式的计算是一个重要的问题，也是一个很复杂的问题. n 级行列式一共有 $n!$ 项，计算它就需做个乘法. 当 n 较大时，$n!$ 是一个相当在的数字. 直接从定义来计算行列式几乎是不可能的事. 因此有必要进一步讨论行列式的性质. 利用这些性质可以化简行列式的计算.

在行列式的定义中，虽然每一项是 n 个元素的乘积，但是由于这 n 个元素是取自不同的行与列，所以对于某一确定的行中 n 个元素（譬如 $a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}$）来说，每一项都含有其中的一个且只含有其中的一个元素. 因之，n 级行列式的 $n!$ 项可以分成 n 组，第一组的项都含有 a_{i1}，第二组的项都含有 a_{i2} 等等. 再分别把 i 行的元素提出来，就有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in} \qquad (1)$$

其中 A_{ij} 代表那些含有 a_{ij} 的项在提出公因子 a_{ij} 之后的代数和. 至于 A_{ij} 究竟是哪

一些项的和暂且不管，到§6 再来讨论. 从以上讨论可以知道，A_{ij} 中不再含有第 i 行的元素，也就是 $A_{i1},A_{i2},\cdots,A_{in}$ 全与行列式中第 i 行的元素无关. 由此即得.

2. 行列式的性质

性质 2

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

这就是说，一行的公因子可以提出去，或者说以一数乘行列式的一行相当于用这个数乘此行列式.

令 $k=0$，就有若行列式中一行为零，则行列式为零.

性质 3

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & \cdots & b_n+c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

这就是说，如果某一行是两组数的和，那么这个行列式就等于两个行列式的和，而这两个行列式除这一行以外全与原来行列式的对应的行一样.

性质 3 显然可以推广到某一行为多组数的和的情形.

性质 4 如果行列式中有两行相同，那么行列式为零. 所谓两行相同就是说两行的对应元素都相等.

证：设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1 j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(i_1\cdots i_i\cdots i_k\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{kj_k}\cdots a_{nj_n}$$

且第i行与第k行相同，即$a_{ij}=a_{kj}$， $j=1,2,\cdots,n$

由于项 $(-1)^{\tau(i_1\cdots i_i\cdots i_k\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{kj_k}\cdots a_{nj_n}$ ①

与项 $(-1)^{\tau(i_1\cdots i_k\cdots i_i\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{ij_k}\cdots a_{kj_i}\cdots a_{nj_n}$ ②

同时出现，且$a_{ij_i}=a_{kj_i}$， $a_{ij_k}=a_{kj_n}$

$\therefore$①与②除去符号外，具有相同的数值，但排列$i_1\cdots i_i\cdots i_k\cdots j_n$与$i_1\cdots i_k\cdots i_i\cdots j_n$相差一个一个对换，具有相反的奇偶性.

$\therefore$①、②的符号相反，即①+②=0.

性质 5 如果行列式中两行成比例，那么行列式为零.

证： 由性质 2、性质 4 即得.

性质 6 把一行的倍数加到另一行，行列式不变.

证： 由性质 3、性质 5 即得.

性质 7 对换行列式中两行的位置，行列式反号.

证：
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\xlongequal[r_i+r_k]{\text{性质6}}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+a_{k1} & a_{2i}+a_{k2} & \cdots & a_{in}+a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_k - r_i]{\text{性质6}}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+a_{k1} & \cdots & \cdots & a_{in}+a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{i1} & \cdots & \cdots & -a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal[r_i + r_k]{\text{性质6}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{i1} & -a_{i2} & \cdots & -a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{n2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

例 1．计算n级行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & b \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

解：原式$\xlongequal{r_1+r_2+\cdots+r_n}\begin{vmatrix} a+(n-1)b & a+(n-1)b & \cdots & a+(n-1)b \\ b & a & b & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$

$$= a+(n-1)b\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$= a+(n-1)b\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ b & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix} = \left[a+(n-1)b\right](a-b)^{n-1}.$$

例 2 计算行列式

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 503 & 201 & 298 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

由于行列式，上(下)三角形行列式容易计算，因此计算行列式的一个基本方法是利用行列式的性质，把行列式化成上(下)三角形行列式进行计算.

例 3 $D_1=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}10&2&3&4\\10&3&4&1\\10&4&1&2\\10&1&2&3\end{vmatrix}$

$$=10\begin{vmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&1\\1&4&1&2\\1&1&2&3\end{vmatrix}=10\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&1&1&-3\\0&2&-2&-2\\0&-1&-1&-1\end{vmatrix}=10\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&1&1&-3\\0&0&-4&4\\0&0&0&-4\end{vmatrix}=160.$$

例 4. 若n级行列式$D_n=|a_{ij}|$的元素满足$a_{ji}=-a_{ij}$， $i,j=1,2,\cdots,n$，（反对称行列式），则当n为奇数时，$D_n=0$

证：D_n的每行提出-1，得

$$D_n=(-1)^n\left|-a_{ij}\right|=(-1)^n\left|a_{ji}\right|=(-1)^n D_n{}'=(-1)^n D_n$$

∴ 当n为奇数时，$D_n=-D_n$，即 $D_n=0$.

五、小结

请同学叙述行列式的性质

六、作业（习题册，预习行列式的计算）

七、教学反思

教学的时间：2020 年 月 日 **教学学时数:2 学时**

2.5 行列式的计算

一、教学目标

1. 理解矩阵的行列式、矩阵的初等变换.
2. 掌握行列式化成上三角行列式进行计算的方法.
3. 通过一些比较典型的例题分析和习题训练, 掌握行列式计算中的一些技巧.

二、教学重点

1. 将行列式化成三角行列式进行计算.
2. 行列式计算中的一些技巧.

三、教学难点

行列式计算中的技巧

四、教学过程

1. 复习引入

复习行列式的性质以及上三角行列式并引入本次的学习内容。

已知上三角形行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 等于它主对角线上元素的乘积 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

这个计算是很简单的. 下面将给出利用行列式的性质想办法把任意的 n 级行列式化为上三角形行列式来计算行列式的方法.

2. 矩阵的定义

定义 5 由 sn 个数排成的 s 行(横的) n 列(纵的)的表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix} \tag{1}$$

称为一个$s\times n$矩阵.

数$a_{ij}, i=1,2,\cdots,s, j=1,2,\cdots,n$, 称为矩阵(1)的元素，$i$称为元素$a_{ij}$的行指标，$j$称为列指标. 当一个矩阵的元素全是某一数域$P$中的数时，它就称为这一数域$P$上的矩阵.

$n\times n$矩阵也称为n级方阵. 一个n级方阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

定义一个n级行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为矩阵A的行列式，记作$|A|$.

3. 矩阵的初等变换

定义 6 所谓数域P上矩阵的初等行变换是指下列三种变换：

1）以P中一个非零的数乘矩阵的某一行；

2）把矩阵的某一行的c倍加到另一行，这里c是P中任意一个数；

3） 互换矩阵中两行的位置.

一般说来，一个矩阵经过初等行变换后，就变成了另一个矩阵. 当矩阵A经过初等行变换变成矩阵B时，我们写成

$$A\to B$$

定义 矩阵的任一行从第一个元素起至该行的第一个非零元素所在的下方全为零；若该行全为 0，则它的下面各行也全为 0，这样的矩阵称为**阶梯形矩阵.**

可以证明，**任意一个矩阵经过一系列初等行变换总能变成阶梯形矩阵**.

现在回过来讨论行列式的计算问题. 一个n级行列式可看成是由一个n级方阵A决定的，对于矩阵可以作初等行变换，而行列式的性质 2，6，7 正是说明了方阵的初等行变换对于行列式的值的影响. 每个方阵A总可以经过一系列的初等行变换变成阶梯形方阵J. 由行列式性质 2，6，7，对方阵每作一次初等行变换，相应地，行列式或者不变，或者差一非零的倍数，也就是

$$|A| = k|J|, k \neq 0$$

显然，阶梯形方阵的行列式都是上三角形的，因此是容易计算的.

4. 例题

例 1 化矩阵$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & -4 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 8 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$**为阶梯形矩阵.**

例 2 计算

$$\begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 13 & 7 \\ 3 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 8 & -7 & -10 \end{vmatrix}$$

不难算出，用这个方法计算一个n级的数字行列式只需要做$\dfrac{n^3+2n-3}{3}$次乘法和除法. 特别当n比较大的时候，这个方法的优越性就更加明显了. 同时还应该看到，这个方法完全是机械的，因而可以用计算机按这个方法来进行行列式的计算.

对于矩阵同样可以定义初等列变换，即

1）以P中一个非零的数乘矩阵的某一列；

2）把矩阵的某一列的c倍加到另一列，这里c是P中任意一个数；

3） 互换矩阵中两列的位置.

为了计算行列式，也可以对矩阵进行初等列变换.有时候，同时用初等行变换和列变换，行列式的计算可以更简单些.

矩阵的初等行变换与初等列变换统称为**初等变换**.

五、小结

矩阵的初等行变换有哪些？对行列式做同样的变换对行列式的值有何影响？

六、作业（习题册）

七、教学反思

教学的时间：2020 年　月　日　　　　**教学学时数:2 学时**

2.6 行列式按一行（列）展开

一、教学目标

1. 掌握余子式、代数余子式的定义.
2. 掌握行列式按一行或列展开的方法.

二、教学重点

行列式按一行（列）展开的方法.

三、教学难点

行列式按一行（列）展开的证明

四、教学过程

1. 新课引入

在 2.4 中指出

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}, i = 1, 2, \cdots, n. \qquad (1)$$

这些 A_{ij}，$i, j = 1, 2, \cdots, n$ 究竟是什么？可以先考虑三阶行列式的情形。

三级行列式可以通过二级行列式表示：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}. \qquad (2)$$

定义 7 在行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

中划去元素a_{ij}所在的第i行与第j列，剩下的$(n-1)^2$个元素按原来的排法构成一个$n-1$级行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (3)$$

称为元素a_{ij}的余子式，记作M_{ij}

下面证明

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

(4)

为此先证明n级行列式与$n-1$级行列式的下面这个关系，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}. \qquad (5)$$

定义 8 上面所谈到的A_{ij}称为元素a_{ij}的代数余子式.

这样，公式(1)就是说，行列式等于某一行的元素分别与它们代数余子式的乘积之和. 在(1)中，如果令第i行的元素等于另外一行，譬如说，第k行的元素，也就是

$$a_{ij} = a_{kj},\ j = 1,2,\cdots,n, k \neq i.$$

于是

$$a_{k1}A_{i1}+a_{k2}A_{i2}+\cdots+a_{kn}A_{in}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

右端的行列式含有两个相同的行，应该为零，这就是说，在行列式中，一行的元素与另一行相应元素的代数余子式的乘积之和为零.

定理 3 设

$$d=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

A_{ij} 表示元素 a_{ij} 的代数余子式，则下列公式成立：

$$a_{k1}A_{i1}+a_{k2}A_{i2}+\cdots+a_{kn}A_{in}=\begin{cases} d\,, & 当k=i\,, \\ 0\,, & 当k\neq i\,. \end{cases} \tag{6}$$

$$a_{1l}A_{1j}+a_{2l}A_{2j}+\cdots+a_{nl}A_{nj}=\begin{cases} d\,, & 当l=j\,, \\ 0\,, & 当l\neq j\,. \end{cases} \tag{7}$$

用连加号简写为

$$\sum_{s=1}^{n} a_{ks}A_{is}=\begin{cases} d\,, & 当k=i\,, \\ 0\,, & 当k\neq i\,; \end{cases} \qquad \sum_{s=1}^{n} a_{sl}A_{sj}=\begin{cases} d\,, & 当l=j\,, \\ 0\,, & 当l\neq j\,. \end{cases}$$

证：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+0+\cdots+0 & 0+a_{i2}+\cdots+0 & \cdots & 0+\cdots+0+a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{i1}\ 0\cdots 0 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 0\ a_{i2}\ 0\cdots 0 \end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix} 0\cdots 0\ a_{in} \end{vmatrix}$$

$$=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in},$$

$$a_{k1}A_{i1}+a_{k2}A_{i2}+\cdots+a_{kn}A_{in}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & & & \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & & & \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ (i) \\ \\ (k) \\ \\ \\ \end{array}=0.$$

在计算数字行列式时，直接应用展开式(6)或(7)不一定能简化计算，因为把一个n级行列式的计算换成n个$(n-1)$级行列式的计算并不减少计算量，只是在行列式中某一行或某一列含有较多的零时，应用公式(6)或(7)才有意义. 但这两个公式在理论上是重要的.

例 1 已知行列式$D=\begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 7 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}$

求：(1)求行列式的 2 行 5 列元素 2 的余子式和代数余子式.

(2)求行列式 D 的值.

(3)求 $2A_{14}+5A_{24}+A_{34}+4A_{44}+5A_{54}$.

(4)求 $A_{14}+A_{24}+A_{34}+A_{44}+A_{54}$.

例 2 行列式

$$d=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} \tag{8}$$

称为n级的范德蒙德(Vandermonde)行列式. 证明对任意的$n(n\geq 2)$，n级范德蒙德行列式等于$a_1,a_2,\cdots,a_n$这n个数的所有可能的差$a_i-a_j\,(1\leq j<i\leq n)$的乘积.

用连乘号，这个结果可以简写为

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le j<i\le n}(a_i - a_j).$$

由这个结果立即得出，范德蒙德行列式为零的充要条件是$a_1, a_2, \cdots, a_n$这n个数中至少有两个相等.

证： 数学归纳法

1^0　$n=2$时，$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1$

2^0　假设对于$n-1$级范德蒙行列式结论成立.

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & \cdots & \cdots & a_n - a_1 \\ 0 & a_2^{\,2} - a_1 a_2 & \cdots & \cdots & a_n^{\,2} - a_1 a_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & a_2^{\,n-1} - a_1 a_2^{\,n-2} & \cdots & \cdots & a_n^{\,n-1} - a_1 a_n \end{vmatrix} = (a_2 - a_1)\cdots(a_n - a_1)\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ a_2 & \cdots & a_n \\ a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_2^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= (a_2 - a_1)\cdots(a_n - a_1)\prod_{2\le j<i\le n}(a_i - a_j) = \prod_{1\le j<i\le n}(a_i - a_j)$$

例 3 证明

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{r1} & \cdots & c_{rk} & b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix}$$

例 4　$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & f \\ b_1 & b_2 & b_3 & f \\ c_1 & c_2 & c_3 & f \\ d_1 & d_2 & d_3 & f \end{vmatrix}$，求$A_{11} + A_{21} + A_{31} + A_{41}$　　（＝0）

例 5　$D=\begin{vmatrix}1 & -5 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 3 & 3\\ 1 & 1 & 2 & 3\\ 2 & 2 & 3 & 4\end{vmatrix}$，求 $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}$. （时间充裕讲，没有时间就不讲）

五、小结

1. 余子式、代数余子式的区别与联系。

2. 如何按照一行或一列展开行列式及其意义何在？

六、作业（习题册）

七、教学反思

教学的时间：2020 年 月 日 **教学学时数:2 学时**

2.7 克拉默（Crammer）法则

一、教学目标

1. 理解线性方程组的定义.
2. 掌握克拉默(Cramer)法则,并认识克拉默法则的意义.

二、教学重点

克莱姆(Cramer)法则

三、教学难点

克莱姆(Cramer)法则的证明

四、教学过程

现在应用行列式解决线性方程组的问题.在次仅考虑方程个数与未知量个数相等，而且系数行列式不等于零的线性方程组.

定理 4(克拉默法则) 如果线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \tag{1}$$

的系数矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{2}$$

的行列式

$$d=|A|\neq 0$$

那么线性方程组(1)有解，并且解是唯一的，解可以通过系数表为

$$x_1=\frac{d_1}{d}\ ,\ x_2=\frac{d_2}{d}\ ,\ \cdots,\ x_n=\frac{d_n}{d}, \tag{3}$$

其中 d_j 是把矩阵 A 中第 j 列换成常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 所成的矩阵的行列式，即

$$d_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\ j=1,2,\cdots,n. \tag{4}$$

定理中包含着三个结论：1）方程组有解；2）解是唯一的；3）解由公式(3)给出.这三个结论是有联系的，因此证明的步骤是：

1．把$(\frac{d_1}{d},\frac{d_2}{d},\cdots,\frac{d_n}{d})$代入方程组，验证它确是解.

2．假如方程组有解，证明它的解必由公式(3)给出.

证明：验证$(\frac{d_1}{d},\frac{d_2}{d},\cdots,\frac{d_n}{d})$为(1)的解．方程组（1）可写成

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i,i=1,2,\cdots,n.$$

把$(\frac{d_1}{d},\frac{d_2}{d},\cdots,\frac{d_n}{d})$ 代入(1)的第 i 个方程:

左端$=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\frac{d_j}{d}=\frac{1}{d}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}d_j=\frac{1}{d}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\sum_{s=1}^{n}b_sA_{sj}$

$=\frac{1}{d}\sum_{j=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}a_{ij}b_sA_{sj}=\frac{1}{d}\sum_{s=1}^{n}b_s\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij}=\frac{1}{d}db_i=b_i$

=右端， $i=1,2,\cdots,n.$

所以$(\frac{d_1}{d},\frac{d_2}{d},\cdots,\frac{d_n}{d})$为(1)的解 ；

验证解唯一.

设$(c_1,c_2,\cdots,c_n)$为(1)的一个解，于是有

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_j = b_i, i=1,2,\cdots,n. \qquad (5)$$

用系数行列式 d 中第 j 列元素的代数余子式 $A_{1j}, A_{2j}, \cdots, A_{nj}$ 依次乘以(5)中 n 个等式， 再把它相加，得

$$(\sum_{s=1}^{n} a_{s1}A_{sj})c_1 + \cdots + (\sum_{s=1}^{n} a_{sj}A_{sj})c_j + \cdots + (\sum_{s=1}^{n} a_{sn}A_{sj})c_n = \sum_{s=1}^{n} b_s A_{sj}$$

即 $dc_j = d_j$. 所以 $c_j = \frac{d_j}{d}, \quad j=1,2,\cdots,n.$

$(\frac{d_1}{d}, \frac{d_2}{d}, \cdots, \frac{d_n}{d})$ 为(1)的唯一解.

注：① （1)的系数行列 d 不等于 0 时，(1)有解且只有唯一解；

② 若(1)无解或有两个不同的解，则(1)的系数行列式 d=0.

例 1 解方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8, \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9, \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5, \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases}$$

应该注意，定理 4 所讨论的只是系数矩阵的行列式不为零的方程组，它只能应用于这种方程组；至于方程组的系数行列式为零的情形，将在下一章的一般情形中一并讨论.

常数项全为零的线性方程组称为**齐次线性方程组**. 显然齐次方程组总是有解的，因为 $(0, 0, \cdots, 0)$ 就是一个解，它称为零解. 对于齐次线性方程组，我们关心的问题常常是，它除了零解以外，还有没有其它解，或者说，它有没有非零解. 对于方程个数与未知量个数相同的齐次线性方程组,应用克拉默法则就有

定理 5 如果齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \tag{10}$$

的系数矩阵的行列式$|A| \neq 0$，那么它只有零解. 换句话说，如果方程组(10)有非零解，那么必有$|A| = 0$.

例 2 问λ取何值时，齐次线性方程组

$$\begin{cases} (5-\lambda)x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + (6-\lambda)x_2 = 0 \\ 2x_1 + (4-\lambda)x_3 = 0 \end{cases}$$ （1）有非零解?

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$ （2）有唯一解，并求出其解.

解: （1）

$$D = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 6-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(2-\lambda)(8-\lambda)$$

当$\lambda = 2,5,8$时，$d = 0$，方程组有非零解.

（2）系数矩阵的行列式不等于零，然后按照克莱默法则进行求解.

克拉默法则的意义主要在于它给出了解与系数的明显关系，这一点在以后许多问题的讨论中是重要的. 但是用克拉默法则进行计算是不方便的，因为按这一法则解一个n个未知量n个方程的线性方程组就要计算$n+1$个n级行列式，这个计算量是很大的.

五、小结

1. 叙述克莱默法则的内容以及其意义。

2. 使用克莱默法则的条件是哪些？

六、作业（习题册）

七、教学反思