1.9三向量的混合积

定义1.9.1 给定空间的三个向量a,b ,c ,如果先做两个向量a,b的向量积,再做所得的向量与第三个向量c的数量积,所得的数叫做a,b,c的混合积.记作 $(\vec{a}\times\vec{b})$.c或者(a,b,c)或(abc)

混合积的性质

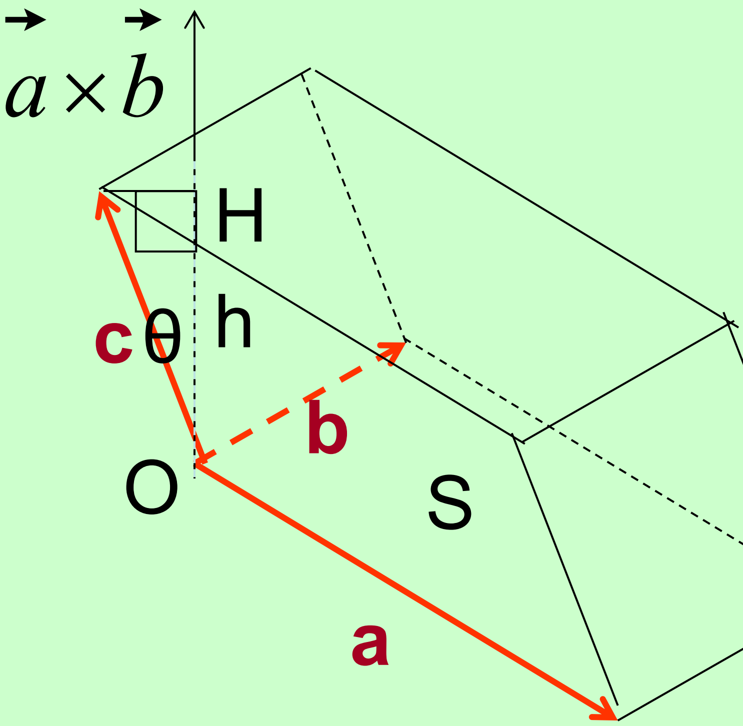
定理1.9.1　三个不共面向量a,b ,c 的混合积的绝对值是以a,b,c为棱的平行六面体的体积V,并且当a,b ,c构成右手系时取正数,构成左手系时取负数.也即

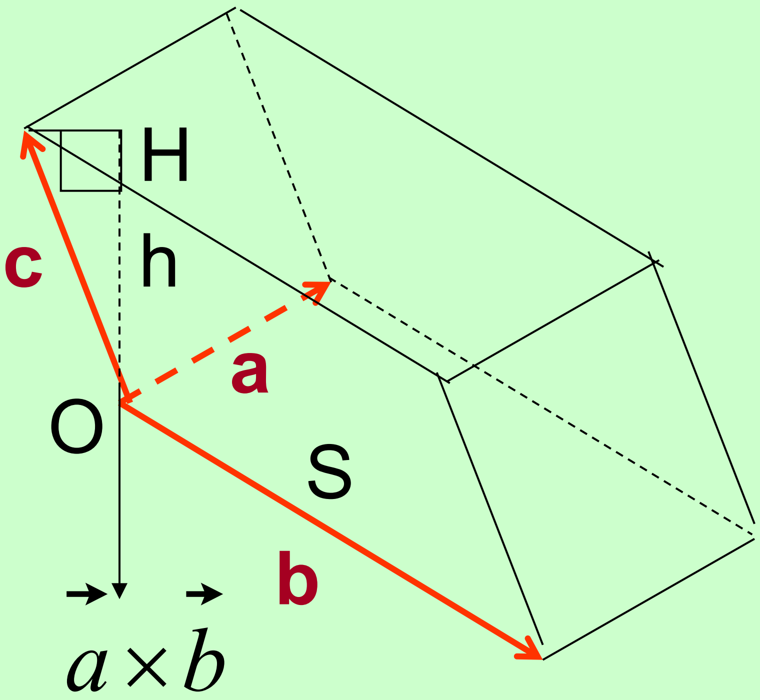
$$(abc)=\varepsilon V\,, \qquad (1.9\text{-}1)$$

当a,b,c成右手系时ε=1,当a,b,c构成左手系时ε= -1

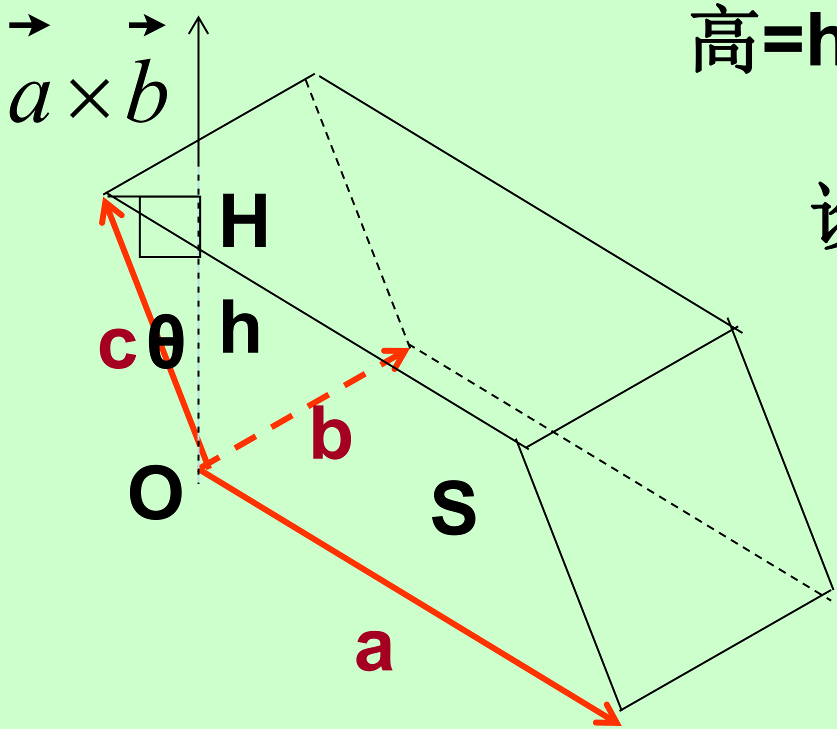
证明: 由于a,b,c三向量不共面,把它们的起点归结到点

O,以它们为棱构成一个平行六面体





它的底面是以a,b为边的平行四边形,面积是S= $|\vec{a}\times\vec{b}|$



高=h, 故 体积V=S.h

设 $\vec{a}\times\vec{b}$ 与c的夹角为θ,

由数量积的定义,有

$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot c=|(\vec{a}\times\vec{b})||c|\cos\theta$ （1）

当 $\{O;a, b, c\}$ 构成右手系时 $0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$

h=$|c|\cos\theta$,因此，由（1），得

$$(\vec{a}\times\vec{b}).c=\left|(\vec{a}\times\vec{b})\right||c|\cos\theta = S.h=V$$

当 $\{O;a, b, c\}$ 构成左手系时 $\frac{\pi}{2} \le \theta < \pi$

h=$|c|\cos$（π−θ）,因此，由（1），得

$$(\vec{a}\times\vec{b}).c=\left|(\vec{a}\times\vec{b})\right||c|\cos(\pi-\theta) = -S.h=-V$$

定理得证。

定理1.9.2　三向量共面的充要条件是$(abc)=0$

（证明略）

在右手直角坐标系下,用坐标的分量表示三向量的混合积

定理1.9.4 在直角坐标系下,如果

a=X_1**i**+Y_1**j**+Z_1**k**, **b**=X_2**i**+Y_2**j**+Z_2**k**, **c**=X_3**i**+Y_3**j**+Z_3**k**,

则(abc)= $\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}$

证明：因为由

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} \mathbf{i} + \begin{vmatrix} Z_1 & X_1 \\ Z_2 & X_2 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

所以有

$$(\vec{a}\times\vec{b}).c = \begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} X_3 + \begin{vmatrix} Z_1 & X_1 \\ Z_2 & X_2 \end{vmatrix} Y_3 + \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix} Z_3$$

从而 $(abc) = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}$

推论：三向量a,b,c:

$a = X_1 i + Y_1 j + Z_1 k$, $b = X_2 i + Y_2 j + Z_2 k$, $c = X_3 i + Y_3 j + Z_3 k$,

共面的充要条件是 $\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} = 0$

定理1.9.3 轮换混合积的三个因子,并不改变它的值;

对调两个因子的顺序,要改变乘积的符号.即

(abc)=(bca)=(cab)=-(bac)=-(cba)=-(acb)

(证明略)

推论 $(\vec{a}\times\vec{b}).\vec{c}=\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})$