第五节　矩阵的分块

主要内容

- 矩阵分块法
- 分块矩阵的运算

一、矩阵分块法

1. 定义

对于行数和列数较高的矩阵 A, 运算时常采用**分块法**, 使大矩阵的运算化成小矩阵的运算.

将矩阵 A 用若干条纵线和横线分成许多个小矩阵, 每一个小矩阵称为 A 的**子块**, 以子块为元素的形式上的矩阵称为**分块矩阵**.

例如将 3×4 矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

分成子块的分法很多,下面举出三种分块形式:

$$(1)\quad \left(\begin{array}{cc:cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right),$$

$$(2)\quad \left(\begin{array}{c|cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right),$$

$$(3)\quad \left(\begin{array}{c|c|c|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right).$$

分法 (1) 可记为 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$,

其中

$$A_{11}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, A_{12}=\begin{pmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{pmatrix},$$

$$A_{21}=\begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}, A_{22}=\begin{pmatrix} a_{33} & a_{34} \end{pmatrix},$$

即 $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$ 为 A 的子块,而 A 形式上成为以这些子块为元素的分块矩阵. 分法 (2) 及 (3) 的分块矩阵可类似写出.

2. 常用的分块法

设有 $s \times n$ 矩阵 $A=(a_{ij})_{sn}$，则对 A 有以下三种最常用的分块方法：

1) 按行分块 即把 A 的每一行当作一个子块，这时每个子块为一行向量，也就是说，矩阵 A 是由一个行向量组组成：

$$A=\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_s \end{pmatrix}.$$

2) 按列分块

即把 A 的每一列当作一个子块，这时每个子块为一列向量，也就是说，矩阵 A 是由一个列向量组组成：$A=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$.

3) 分块对角矩阵(又称准对角矩阵)

当 n 级矩阵 $A=(a_{ij})_n$ 中非零元素都集中在主对角线附近时，有时可将 A 分块成下面的**分块对角矩阵(准对角矩阵)**.

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & O \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_l \end{pmatrix}$$

其中 A_i 是 n_i 级方阵 ($i = 1, 2, \dots, l$) .

例如
$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 8 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2019 \end{pmatrix}$$

二、分块矩阵的运算

分块矩阵的运算规则与普通矩阵的运算规则相类似.

1. 加法运算

设矩阵 A 与 B 同型矩阵，采用相同的分块法，有

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{s1} & \cdots & B_{sr} \end{pmatrix},$$

其中 A_{ij} 与 B_{ij} 是同型矩阵，那么

$$A+B=\begin{pmatrix} A_{11}+B_{11} & \cdots & A_{1r}+B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1}+B_{s1} & \cdots & A_{sr}+B_{sr} \end{pmatrix}.$$

2. 数乘运算

设 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}$, λ 为常数,则

$$\lambda A=\begin{pmatrix}\lambda A_{11} & \cdots & \lambda A_{1r}\\ \vdots & & \vdots\\ \lambda A_{s1} & \cdots & \lambda A_{sr}\end{pmatrix}.$$

3. 分块矩阵的乘法运算

设 A 为 $m\times l$ 矩阵, B 为 $l\times n$ 矩阵, 分块成

$$A=\begin{pmatrix}A_{11} & \cdots & A_{1t}\\ \vdots & & \vdots\\ A_{s1} & \cdots & A_{st}\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}B_{11} & \cdots & B_{1r}\\ \vdots & & \vdots\\ B_{t1} & \cdots & B_{tr}\end{pmatrix},$$

其中 $A_{i1}, A_{i2}, \ldots, A_{it}$ 的列数分别等于 $B_{1j}, B_{2j}, \ldots, B_{tj}$

的行数,那么

$$AB = \begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{s1} & \cdots & C_{sr} \end{pmatrix},$$

其中 $C_{ij} = \sum_{k=1}^{t} A_{ik} B_{kj} \quad (i = 1, \cdots, s;\ j = 1, \cdots, r).$

例 1 设

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&2&1&0\\1&1&0&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\-1&2&0&1\\1&0&4&1\\-1&-1&2&0\end{pmatrix},$$

求 AB.

解 把 A、B 分块成

$$A=\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} E & O \\ A_1 & E \end{pmatrix},$$

$$B=\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} B_{11} & E \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix},$$

则

$$AB=\begin{pmatrix} E & O \\ A_1 & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{11} & E \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_{11} & E \\ A_1B_{11}+B_{21} & A_1+B_{22} \end{pmatrix},$$

而

$$A_1B_{11}+B_{21}=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_1+B_{22}=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},$$

于是

$$AB=\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 0 & 1\\ \hline -2 & 4 & 3 & 3\\ -1 & 1 & 3 & 1\end{array}\right).$$

4. 分块矩阵的转置

设 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}$，则 $A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} A_{11}^{\mathrm{T}} & \cdots & A_{s1}^{\mathrm{T}} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1r}^{\mathrm{T}} & \cdots & A_{sr}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$.

例 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$,

求 B^{T}， A^{T}，$(AB)^{\mathrm{T}}$.

5. 分块对角矩阵的运算

设 A 为 n 级矩阵,且 A 可分成如下分块对角矩阵.

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & O \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_l \end{pmatrix},$$

分块对角矩阵的性质:

1) $|A| = |A_1|\ |A_2| \cdots |A_l|$;

2) 若 $|A_i| \neq 0\ (i = 1, 2, \ldots, l)$，则 $|A| \neq 0$，且

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & O \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_l^{-1} \end{pmatrix}.$$

例 求矩阵A的逆矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 8 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2019 \end{pmatrix}$

设 A，B 是两个 n 级矩阵，且采用相同的分法可把它们都分成分块对角矩阵：

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & O \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_l \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} B_1 & & & O \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & B_l \end{pmatrix}.$$

则有

$$AB = \begin{pmatrix} A_1B_1 & & & O \\ & A_2B_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_lB_l \end{pmatrix},$$

$$A+B = \begin{pmatrix} A_1+B_1 & & & O \\ & A_2+B_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_l+B_l \end{pmatrix}.$$

例 2 设 n 级矩阵 D 分块为

$$D=\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}$$

其中 A，B 分别是 k 级和 r 级的可逆矩阵，C 是 $r\times k$ 级矩阵，O 是 $k\times r$ 级零矩阵，求 D^{-1}.

解 因为

$$|D|=|A||B|,$$

所以当 A，B 可逆时，D 也可逆.

设

$$D^{-1}=\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix},$$

于是

$$\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} AX_{11} & AX_{12} \\ CX_{11}+BX_{21} & CX_{12}+CX_{22} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} E_k & O \\ O & E_r \end{pmatrix},$$

由此可得

$$\begin{cases} AX_{11} = E_r, \\ AX_{12} = O, \\ CX_{11} + BX_{21} = O, \\ CX_{12} + BX_{22} = E_r. \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $X_{11} = A^{-1}$

$\Rightarrow$ $X_{12} = O$

$\Rightarrow$ $X_{21} = -B^{-1}CA^{-1}$

$\Rightarrow$ $X_{22} = B^{-1}$

所以

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix}.$$

例 3 设

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0&0&0\\2&5&0&0&0\\0&0&-2&1&0\\0&0&0&-2&1\\0&0&0&0&-2\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\-1&2&3&0\\1&2&0&4\\0&1&2&4\\0&0&1&4\end{pmatrix}$$

用矩阵分块的方法：(1) 计算 A^2，AB；(2) 求 A^{-1}.

解 把矩阵 A，B 进行如下分块

$$A=\left(\begin{array}{cc:ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right), B=\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \\ \hdashline 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

并令

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix},$$

其中

$$A_1=\begin{pmatrix}1&2\\2&5\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}-2&1&0\\0&-2&1\\0&0&-2\end{pmatrix},$$

$$B_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\-1&2\end{pmatrix},\ B_{12}=\begin{pmatrix}1&0\\3&0\end{pmatrix},$$

$$B_{21}=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\\0&0\end{pmatrix},\ B_{22}=\begin{pmatrix}0&4\\2&4\\1&4\end{pmatrix}.$$

则 1) $$A^2=\begin{pmatrix}A_1 & O\\ O & A_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1 & O\\ O & A_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1^{\,2} & O\\ O & A_2^{\,2}\end{pmatrix}$$

其中 $$A_1^{\,2}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 12\\ 12 & 29\end{pmatrix},$$

$$A_2^{\,2}=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -4 & 1\\ 0 & 4 & -4\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix};$$

$$AB=\begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_1B_{11} & A_1B_{12} \\ A_2B_{21} & A_2B_{22} \end{pmatrix},$$

其中

$$A_1B_{11}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -3 & 10 \end{pmatrix},$$

$$A_1B_{12}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 17 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_2B_{21}=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_2B_{22}=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 4\\ 2 & 4\\ 1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -4\\ -3 & -4\\ -2 & -8\end{pmatrix},$$

所以

$$AB=\begin{pmatrix}-1 & 4 & 7 & 0\\ -3 & 10 & 17 & 0\\ -2 & -3 & 2 & -4\\ 0 & -2 & -3 & -4\\ 0 & 0 & -2 & -8\end{pmatrix}.$$

2) 因为 $A=\begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}$，所以 $A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & O \\ O & A_2^{-1} \end{pmatrix}$,

由 $A_1=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{求逆}} A_1^{-1}=\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$,

由 $A_2=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{求逆}} A_2^{-1}=-\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$

所以

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

小结和作业

1.矩阵分块之后加法，数乘，乘法以及转置如何计算?

2. 常用的矩阵的分块的方法有哪些?

3.请叙述分块对角矩阵的运算.

4.作业见学习通.